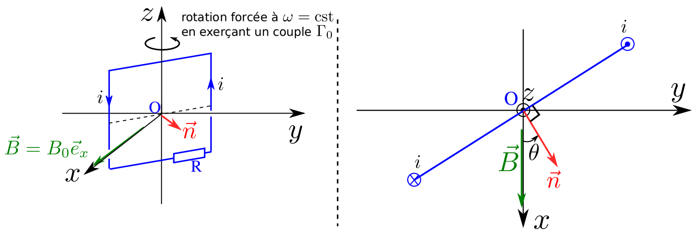
44.3 Exercice C3 – conversion mécanique → électrique avec machine en rotation : l'alternateur

On considère une spire rectangulaire de surface S, schématisée ci-contre. Cette spire est refermée sur une résistance R, qui représente un dipôle à alimenter (ceci peut-être une lampe, une batterie à charger, peu importe).

La spire baigne dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0$, produit par un dispositif externe (par exemple des aimants).



On fournit un certain couple Γ_0 pour maintenir en rotation cette spire autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire ω constante.

Ceci va avoir pour effet de produire un courant induit i dans la spire, et donc d'alimenter le dipôle R. Il s'agit donc d'un convertisseur de puissance mécanique ($\Gamma_0\omega$ donne la puissance mécanique fournie pour maintenir la rotation) en puissance électrique (Ri^2 fournie au dipôle).

C'est le principe de base des dynamos de vélo ou des alternateurs de voiture qui rechargent la batterie en roulant.

Description de ce qu'il se passe

1 - Expliquer qualitativement (= sans équations) pourquoi la rotation de la spire dans le champ $\vec{B}_0$ induit un courant i.

Détermination du courant produit et de la puissance électrique produite

2 - Suivre les étapes de la méthode du chapitre précédent pour établir l'équation électrique :

- **a -** Étape 1 : Orienter le circuit en choisissant un sens du courant (c'est déjà fait sur le schéma !).
- **b -** Étape 2 : Montrer que le flux de $\vec{B}_0$ à travers la spire s'écrit $\Phi = B_0 S \cos\omega t$.
- **c -** Étape 3 : Faire un schéma électrique équivalent.
- **d -** Étape 4 : à l'aide de la loi des mailles, en déduire l'expression du courant i induit.

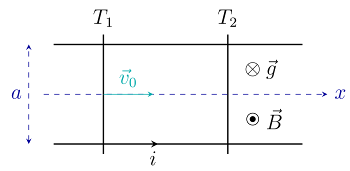
(**Remarque :** On a négligé l'inductance propre de la spire, qu'on aurait pu prendre en compte soit en ajoutant un terme Li à Φ, soit en ajoutant une inductance L dans le schéma électrique équivalent.)

3 - En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}_{\text{élec}} = ei$ fournie par la fem induite (et donc aussi reçue par le dipôle R).

Bilan : l'expression de i montre qu'on a bien fabriqué un générateur de courant alternatif

44.8 Rails de Laplace couplés

Deux tiges T_1 et T_2 identiques, de masse m, sont mobiles sur deux rails horizontaux parallèles séparés d'une distance a. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. On note R la résistance électrique totale des tiges.
À l'instant initial, T_2 est immobile et T_1 est lancée vers T_2 à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$. Les deux tiges restent parallèles lors de leur mouvement. On note leurs vitesses $\vec{v}_1 = v_1(t)\vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2(t)\vec{e}_x$. On négligera tout frottement, la résistance électrique des rails, et l'auto-induction.



1 - Expliquer sans calcul mais avec précision pourquoi la tige T_1 ralentit alors que la tige T_2 se met en mouvement. Dans quel sens se déplace T_2 ?

2 - Établir un système de deux équations différentielles couplées portant uniquement sur v_1 et v_2.

3 - Une technique pour résoudre ces deux équations couplées sur v_1 et v_2 est d'abord d'en déduire les équations différentielles vérifiées par les fonctions somme et différence,

$$\Sigma(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad \text{et} \quad \Delta(t) = v_1(t) - v_2(t)\,.$$

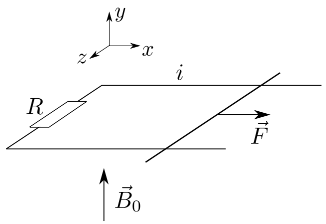
Puis en déduire $v_1(t)$ et $v_2(t)$ et tracer leur allure sur un même graphe.

4 - Déterminer le courant $i(t)$ qui traverse le circuit.

5 - Calculer l'énergie totale dissipée par effet Joule au cours de l'évolution du système entre $t = 0$ et $t \to \infty$.

6 - Calculer la variation ΔE_{m} d'énergie mécanique du système entre $t = 0$ et $t \to \infty$. Commenter.

44.1 Exercice C1 – Principe de la conversion mécanique $\to$ électrique : rails de Laplace tractés



On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact est notée a, sa masse m, et elle peut glisser sans frottement sur les rails.

Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_y$ est constant et uniforme à travers le circuit.

Il n'y a pas de générateur électrique. En revanche, un opérateur exerce une force $\vec{F}$ sur la tige afin de la faire glisser avec une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x$.
La résistance R représente un dipôle à alimenter (ceci peut-être une lampe, une batterie à charger, peu importe).

On néglige la résistance électrique r des rails ou de la tige, ainsi que l'induction propre L du circuit.

1 - Description de ce qu'il se passe :

a - Expliquer pourquoi le fait de forcer la tige à se déplacer va donner lieu à un courant induit.

b - D'après la loi de Lenz, que tend à faire ce courant ?

En déduire le sens dans lequel il s'établit.

Dans la suite nous orientons le circuit dans le sens de ce courant.

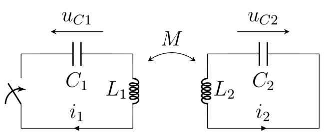
Bilan : il y a production d'un courant i, donc on a bien fabriqué un générateur de courant.
La force de Laplace associée à ce courant induit tend à nous empêcher de déplacer la tige : la puissance mécanique que l'on fournit via la force $\vec{F}$ sert donc à s'opposer à cette résistance.

2 - Détermination du courant produit et de la puissance électrique produite

a - Suivre la méthode habituelle pour aboutir à l'expression du courant i en fonction de a, B_0, v et R (il s'agira de l'équation électrique). Attention à l'orientation de la normale du circuit.

Bilan : on a là un dispositif qui produit un courant i continu, et donc qui fournit une certaine puissance au dipôle à alimenter.

43.8 Circuits LC couplés par mutuelle



Dans le circuit ci-contre, seul le condensateur C_1 est chargé sous la tension U_0 à la date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur. Pour simplifier les calculs, on considère $C_1 = C_2 = C$ et $L_1 = L_2 = L$, et on pose

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}} \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$$

1 - Établir deux équations différentielles couplées sur les tensions u_{C1} et u_{C2} aux bornes des condensateurs.

2 - En déduire deux équations sur les fonctions somme $f(t) = u_{C1} + u_{C2}$ et différence $g(t) = u_{C1} - u_{C2}$.

3 - Résoudre ces équations et en déduire l'expression de la tension u_{C1} sous forme d'un produit de cosinus.

4 - On suppose que le couplage inductif est faible ($M \ll L$). Déterminer le coefficient β tel que

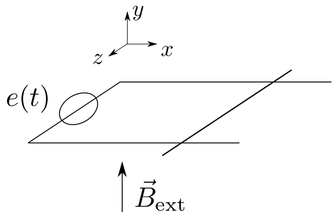
$$\omega_{1,2} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \beta \frac{M}{L}\right).$$

Réécrire l'expression de u_{C1}.

5 - Tracer son allure.

44.2 Exercice C2 – Principe de la conversion électrique → mécanique : rails de Laplace alimentés

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact est notée a, sa masse m, et elle peut glisser sans frottement sur les rails.



Le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_y$ est constant et uniforme à travers le circuit. Pour $t < 0$ le générateur ne fournit pas de tension. Puis à partir de $t = 0$ il fournit une tension constante E_0. On note R la résistance électrique totale du circuit.

1 - L'orientation du générateur n'est pas précisée. On voudrait que le flux de $\vec{B}_0$ à travers le circuit orienté soit positif. Orienter le générateur pour que ce soit le cas.

2 - Équation mécanique

a - Donner l'expression de la résultante $\vec{F}_L$ des forces de Laplace qui s'exerce sur la tige mobile, en fonction de a, i, B_0 et d'un vecteur de la base. En quel point s'applique-t-elle ?

b - Établir l'équation du mouvement sur la composante $v(t)$ de la vitesse de la tige selon $\vec{e}_x$. Il s'agit de l'équation mécanique du système.

Bilan : l'équation mécanique fait intervenir la vitesse et le courant, qui n'est pas constant (effets d'induction). Il y a donc deux inconnues (v et i) pour une équation : il en faut une autre.

3 - Équation électrique

Afin de connaître l'évolution du courant, il faut établir l'équation électrique du circuit équivalent. Comme le circuit ne comporte qu'une seule boucle, on néglige son inductance propre (donc $L = 0$, le flux propre est négligeable devant le flux de $\vec{B}_0$).

a - Suivre les étapes de la méthode (chapitre 2) pour établir l'équation électrique du circuit (équation sur i, qui fera aussi intervenir la position x de la barre ou ses dérivées).

Bilan : l'équation électrique relie elle aussi v et i.

4 - Utiliser les deux équations précédentes (électrique et mécanique) pour aboutir à une équation différentielle sur la vitesse de la barre.
En déduire l'expression de la vitesse limite atteinte, puis du courant débité en régime permanent.

43.9 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique permet la mesure de courants de fortes intensités sans avoir à ouvrir le circuit pour y placer un ampèremetre. Lorsque la pince est fermée autour d'un fil, ses deux mâchoires constituent une bobine, et le phénomène d'induction magnétique permet d'obtenir aux bornes de cette bobine une tension directement liée à l'intensité à mesurer.

On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$.

Le courant dont l'intensité variable i_1 est à mesurer parcourt un fil rectiligne (1), confondu avec l'axe Oz, dont les bornes A_1 et A_2 sont supposées infiniment éloignées l'une de l'autre. On peut montrer que le champ créé en tout point de l'espace M repéré par ses coordonnées cylindriques, voir figure 1, vaut

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0\, i_1}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

On modélise la pince ampèremétrique par un tore de section carrée de côté $a = 1\,\mathrm{cm}$, d'axe Oz et de rayon moyen $r_0 = 5\,\mathrm{cm}$ sur lequel sont bobinées régulièrement $N = 1000$ spires régulièrement réparties, voir figures 2 et 3. Les deux extrémités du bobinage sont reliées à un oscilloscope.
On néglige les phénomènes d'autoinduction.

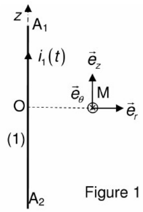


Figure 1

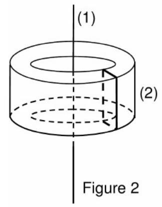


Figure 2

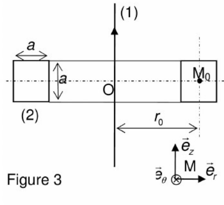


Figure 3

Tension aux bornes de la bobine

1 - On fait l'approximation que le champ magnétique est uniforme sur la surface d'une spire du tore et égal à sa valeur en M_0. Calculer le flux Φ_{12} de $\vec{B}_1$ au travers d'une spire du bobinage (2), puis au travers du bobinage (2) entier.

2 - Donner alors l'expression de la tension u_2 obtenue aux bornes du bobinage (2).

3 - Le courant dans le fil (1) est sinusoïdal d'intensité $i_1(t) = I_\mathrm{m}\cos\omega t$. Déterminer l'expression de la fonction de transfert complexe de la pince définie par $\underline{H} = \underline{U}_2/\underline{I}_1$.

4 - Que devient l'expression à haute fréquence ? à basse fréquence ? Une pince ampèremétrique permet-elle de mesurer des intensités dans toutes les gammes de fréquence ? Commenter.

Mesures

Le courant dans le fil (1) est sinusoïdal d'intensité $i_1(t) = I_\mathrm{m}\cos\omega t$. La bobine (2) étant reliée à un oscilloscope, l'oscillogramme obtenu est représenté ci-contre. Les échelles sont de 1 carreau pour 5 ms et 1 carreau pour 500 mV.

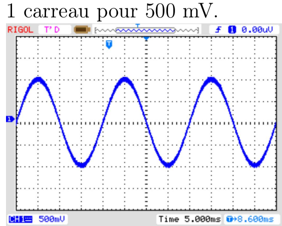


Figure 4

5 - Établir l'expression de la tension $u_2(t)$ à l'aide des paramètres μ_0, N, a, r_0, ω et I_m.

6 - Quelle est la valeur numérique de la fréquence f de i_1 ?

7 - Quelle est la valeur numérique de l'amplitude I_m de i_1 ? de sa valeur efficace ?