Méthodes numériques

Propagation des incertitudes et simulations Monte Carlo

Objectif : voir comment calculer une incertitude-type lorsque la grandeur est issue d'un calcul non simple.
Notebook Python : `c842-1665294`

I Évaluation de type A des incertitudes

1 - Reporter les résultats des groupes de la classe dans le tableau ci-dessous :

c_0 en $\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$										

En déduire :

Moyenne $\bar{c_0} =$, écart-type $\sigma =$.

À partir de ces mesures, on peut conclure deux choses distinctes :

Incertitudes

- L'incertitude-type associée à une mesure est donnée par σ :

$$u(c_0) = \sigma = \qquad .$$

Si je fais une mesure, c'est cette incertitude là qui compte.

En effet, σ rend compte de la dispersion de la série des mesures répétées, et indique la fluctuation possible si je répète la mesure.

- L'incertitude-type associée à la moyenne $\bar{c_0}$ des N mesures est donnée par $\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$:

$$u(\bar{c_0}) = \frac{\sigma}{\sqrt{\text{nb mesures}}} = \qquad .$$

Elle est inférieure à l'incertitude sur une unique mesure, ce qui est normal car les erreurs aléatoires ont tendance à se compenser [a].

a. Toutefois pas toujours. Par exemple si la température T_0 de l'étuve est erronée, alors tous les groupes font la même erreur. On parle d'erreur systématique.

En conclusion, ce qui précède permet d'estimer l'incertitude sur une mesure ($u(c_0)$), mais aussi celle sur la moyenne ($u(\bar{c_0})$). Il s'agit d'une méthode de type A car elle exploite une série de plusieurs mesures.

II Évaluation de type B des incertitudes

Pour faire ce qui précède, il faut que plusieurs groupes fassent la mesure. Si vous êtes seul (un seul groupe), il n'y a qu'une seule mesure c_0. On estime alors l'incertitude $u(c_0)$ avec une méthode de type B.

a/ Pour des formules simples : formule de propagation des incertitudes

On s'intéresse à une grandeur calculée à partir de mesures. Par exemple vous venez de mesurer le volume V du morceau de métal, sa masse m, puis vous en avez déduit à l'aide d'un calcul la masse volumique $\rho = \dfrac{m}{V}$.

Dans un cas simple comme celui-ci, il existe une formule qui permet d'obtenir l'incertitude-type sur ρ (cf poster incertitudes) :

$$u(\rho) = \rho \times \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2} = \tag{1}$$

2 - En prenant par exemple $u(V) = \dfrac{1\,\mathrm{mL}}{\sqrt{3}}$ et $u(m) = \dfrac{0{,}1\,\mathrm{g}}{\sqrt{3}}$ en déduire l'incertitude-type sur votre mesure de ρ du métal.

(**Remarque** : on a divisé par $\sqrt{3}$, car par exemple $\Delta = 1\,\mathrm{mL}$ est la demi-étendue d'incertitude de la mesure (instrument gradué au mL : on connait V à $\pm 1\,\mathrm{mL}$), et l'incertitude-type est alors $u = \Delta/\sqrt{3}$ (cf poster).)

b/ Pour les cas moins simples : simulation Monte Carlo (tirages au sort)

S'il existe des formules simples pour calculer l'incertitude dans le cas d'une addition, d'une multiplication ou d'une division (cf poster incertitudes), ce n'est pas le cas en général.

Par exemple pour la capacité thermique massique du métal, la formule est :

$$\boxed{c_0 = \frac{(m_{\mathrm{eau}} c_{\mathrm{eau}} + C_{\mathrm{calo}})(T_2 - T_1)}{m_0 (T_0 - T_2)}.} \tag{2}$$

Tous les termes à droite sont issus de mesures. Il n'y a pas d'équivalent simple de la formule (1). Il est alors plus rapide d'utiliser un tirage au sort simulé, décrit dans la suite.

On prendra $c_{\mathrm{eau}} = 4{,}2 \times 10^3\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$, $m_{\mathrm{eau}} = 250\,\mathrm{g}$, $m_0 = 59\,\mathrm{g}$ (pas d'incertitudes sur ces trois valeurs car assez précis), et :

- Température eau froide $T_1 = 19{,}5\,^\circ\mathrm{C}$ avec demi-étendue d'incertitude $\Delta(T_1) = 0{,}1\,^\circ\mathrm{C}$;
- température métal $T_0 = 85\,^\circ\mathrm{C}$ indiqué par l'étuve avec demi-étendue d'incertitude $\Delta(T_0) = 5\,^\circ\mathrm{C}$ (peu précis) ;

- température finale $T_2 = 22{,}5\,°\mathrm{C}$ avec demi-étendue d'incertitude $\Delta(T_2) = 0{,}2\,°\mathrm{C}$;
- $C_{\text{calo}} = 140\,\mathrm{J/K}$ avec incertitude-type $u(C_{\text{calo}}) = 10\,\mathrm{J/K}$ (donc demi-étendue d'incertitude $\Delta(C_{\text{calo}}) = \sqrt{3} \times 10 = 17\,\mathrm{J/K}$).

3 - Écrire une fonction `c0(T1,T0,T2,Ccalo)` qui retourne la valeur de la capacité thermique massique c_0 du métal. On supposera les valeurs de `meau`, `m0` et `ceau` définies en dehors de la fonction.

Que vaut-elle avec les valeurs ci-dessus ?

La formule 2 est trop complexe pour estimer l'incertitude par un calcul direct. L'idée est donc de procéder à des tirages au sort des grandeurs variables (ici T_1, T_0, T_2 et C_{calo}), et de calculer à chaque fois c_0. On obtient ainsi une liste de nombreuses valeurs de c_0, qui simule en quelque sorte ce qu'on aurait obtenu si on avait répété un grand nombre de fois la mesure. On peut alors calculer l'écart-type de cette liste. Cet écart-type donne l'incertitude-type $u(c_0)$.

Idée de l'algorithme Monte Carlo pour la composition des incertitudes

On définit un nombre de tirages au sort	`N = 10000`
On initialise une liste vide.	`liste = []`

On réalise les tirages au sort de chaque grandeur mesurée, et à chaque fois on calcule la grandeur associée et on la met dans la liste.	`for i in range(N):`
	`    T1 = np.random.uniform(..,..)`
	`    T0 = np.random.uniform(..,..)`
	`    T2 = np.random.uniform(..,..)`
	`    Ccalo = np.random.uniform(..,..)`
	`    c = c0(T1,T0,T2,Ccalo)`
	`    liste.append(c)`

On calcule la moyenne, puis l'écart-type des valeurs de la liste qui donne donc l'incertitude-type).	`moyenne = np.mean(liste)`
	`inc_type = np.std(liste)`
	`print(moyenne, inc_type)`

(Si on le souhaite, on peut tracer l'histogramme.)	`plt.hist(liste, bins='auto')`

La fonction `np.random.uniform(a,b)` génère un nombre aléatoire compris entre `a` et `b` avec une distribution de probabilité uniforme.

On prendra donc a =valeur mesurée moins Δ et b = valeur mesurée plus Δ, avec Δ la demi-étendue d'incertitude.

Par exemple : `T0 = np.random.uniform(85-5,85+5)`.

4 - Compléter l'algorithme Monte Carlo qui permet de calculer l'incertitude-type $u(c_0)$ sur votre mesure.

L'exécuter pour obtenir la valeur de c_0 et celle de l'écart-type de la série de données. Cette dernière donne l'estimation de type B de $u(c_0)$.

5 - Conclusion : comparer cette évaluation de type B, à $u(c_0)$ obtenu par la méthode de type A dans le I.

Bilan : type A ou type B pour l'incertitude sur une mesure

En conclusion, il faut bien comprendre la différence entre les deux méthodes.

- Avec le type A, il faut disposer de plusieurs mesures répétées. L'avantage est qu'il n'y a alors pas besoin d'estimer la précision du matériel ou des manipulations, il suffit de calculer l'écart-type de l'ensemble des résultats. Le désavantage est qu'il faut plusieurs mesures.

- Avec le type B, il est nécessaire d'estimer la précision du matériel ou des manipulations. On utilise ensuite une formule (comme celle avec la grande racine carrée), ou un algorithme Monte Carlo si les formules ne sont pas disponibles, pour obtenir l'incertitude-type.

  Avantages et désavantages sont inversés par rapport au type A : il faut estimer les incertitudes, mais ici pas besoin de plusieurs mesures.

Si tout est bien fait, l'estimation de type A et celle de type B donnent environ les mêmes incertitudes.

Bien noter également qu'on divise par $\sqrt{\text{nb mesures}}$ seulement si on veut l'incertitude sur la moyenne de plusieurs résultats (moyenner compense les erreurs aléatoires et réduit l'incertitude).