

Méthode d'Euler (équations différentielles du 1^{er} ordre)

La méthode d'Euler est une méthode numérique qui permet de résoudre numériquement une équation différentielle en approximant les dérivées par des développements limités.

Ici on s'intéresse à une équation différentielle du premier ordre, par exemple :

$$\frac{du}{dt} = \underbrace{-\frac{u}{\tau} + \frac{E}{\tau}}_F, \quad \text{CI : } u(t=0) = u_0$$

dont l'inconnue est $u(t)$.

Ici E est une tension imposée par le générateur pour $t > 0$ (et nulle pour $t < 0$).

Dans la suite on note le membre de droite F pour alléger les notations.

Étape 1 : utiliser une approximation pour la dérivée. Il y a plusieurs possibilités. La méthode d'Euler *explicite* utilise l'approximation suivante :

$$\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(t+dt) - u(t)}{dt} \quad \text{avec } dt \text{ une durée très courte.}$$

↪₁ On s'en sert pour isoler $u(t+dt)$:

Remarque : une autre façon de voir ceci est d'utiliser un développement limité,

$$u(t+dt) = u(t) + \frac{du}{dt}(t) \times dt$$

et on remplace $\frac{du}{dt}(t)$ par F (car l'équation à résoudre est $\frac{du}{dt} = F$). On obtient pareil.

Étape 2 : idée de l'algorithme.

L'équation encadrée permet de calculer $u(t+dt)$ si on connaît $u(t)$.

↪₂ Par exemple, que donne cette relation pour $t = 0$? pour $t = dt$?

On va donc procéder successivement :

- On part de u_0 qui est $u(t = 0)$, on le met dans une liste `liste_u`.
- On en déduit $u(dt) = u_0 + F \times dt$ et on le met dans la liste.
- On en déduit $u(2dt) = u(dt) + F \times dt$ et on le met dans la liste.
- Etc... on en déduit u à tous les instants $i \times dt$, et on s'arrête quand cela suffit.

Voici le code complet, que l'on va expliquer :

```
1 R = 1e3
2 C = 1e-9
3 tau = R*C          # calcul de tau = R*C
4 u0 = 0             # valeur initiale
5 E = 10             # valeur de la tension imposée pour t>0
6
7 tmax = 5*tau       # on se donne la durée de la simulation
8 dt = tau/10        # ainsi que le pas de temps, assez court
9 N = int(tmax/dt)   # on en déduit par calcul le nombre total d'itérations nécessaires
10
11 #----- Méthode d'Euler -----#
12 # Initialisation des listes :
13 liste_t = [0]
14 liste_u = [u0]
15 t = 0
16 u = u0
17
18 for i in range(N):
19     # on dispose des variables de l'itération précédente : t et u
20     # et on calcule leurs nouvelles valeurs :
21     u = u + dt*(-u/tau + E/tau)
22     t = t + dt
23
24     # On ajoute ces nouvelles valeurs à chaque liste :
25     liste_t.append(t)
26     liste_u.append(u)
```

► Lignes 1 à 5 : définition des constantes.

► Lignes 7 à 9 :

★ On se donne une durée totale notée `tmax`, qu'on prend ici égale à $5 \times \tau$.

★ On se donne le pas de temps `dt`, qu'on prend ici égal à $\tau/10$.

→ On en déduit le nombre total N d'instant.

Par exemple si $t_{\max} = 10$ s et $dt = 0,1$ s, alors $N = \frac{t_{\max}}{dt} = \dots$ points.

► **Lignes 13 à 16 :**

On initialise une liste pour le temps et une pour la tension u , avec les valeurs initiales : `liste_u = [u0]` et `liste_t = [0]`.

On initialise aussi les premières valeurs de u et de t : `u=u0` et `t=0`.

Après exécution de tout l'algorithme,

- `liste_t[i]` vaudra $t_i = i \times dt$
- `liste_u[i]` contiendra la valeur $u(t_i)$.

► **Lignes 18 et suivantes :** l'algorithme remplit les listes avec une boucle `for`.

★ Ligne 21 : on suppose connue l'ancienne valeur de u (elle vient de l'itération précédente). Alors la nouvelle valeur, qu'on note encore u , est obtenue à partir de la relation :

$$u(t + dt) = u(t) + \left(-\frac{u}{\tau} + \frac{E}{\tau}\right) \times dt.$$

Ceci donne la ligne 21 : `u = u + dt*(-u/tau + E/tau)`.

★ Ligne 22 : même chose avec le temps. La nouvelle valeur de t est égale à l'ancienne, plus dt : `t = t + dt`.

★ Lignes 25 et 26 : on ajoute les nouvelles valeurs à `liste_t` et `liste_u` avec la commande `append`.

Remarque : si on note $u(t_i) = u_i$, on a en fait une relation de récurrence :

$$u_{i+1} = u_i + dt \times \left(-u_i/\tau + E/\tau\right),$$

qui permet de connaître $u(t)$ à certains instants t_i :

$$t_0 = 0, t_1 = dt, t_2 = 2dt, \dots, t_N = Ndt.$$

À vous de jouer

Aller sur l'ENT du lycée, puis sur Capytale, et démarrer l'activité `c84d-901065`.

Remarque : variantes possibles

En SII, vous allez également voir la méthode d'Euler. Ce sera la même chose qu'ici, à quelques détails près (mais qui ne changent pas la méthode) :

- ▶ Le pas de temps dt est noté h .
- ▶ La démonstration de la méthode passe non pas par l'approximation $\frac{du}{dt} \simeq \frac{u(t + dt) - u(t)}{dt}$, mais par une intégration de l'équation et par l'utilisation d'une approximation pour calculer une intégrale numériquement. (Mais on arrive à la même chose.)
- ▶ Vous pouvez utiliser une boucle `while` à la place d'une boucle `for` et construire les listes un peu différemment.
- ▶ Il existe différentes méthodes d'Euler : ici nous avons vu la méthode explicite, en SII vous pourrez aussi voir la méthode implicite.