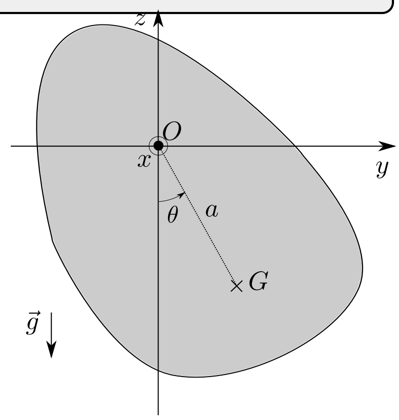
Révisions mécanique

Mécanique du solide en rotation

I Rappels



Expressions des différentes grandeurs

- **Moment d'inertie** d'un solide par rapport un axe Ox :
  - ⋆ Pour une masse ponctuelle m située à une distance r de l'axe Ox : $J_{Ox} = r^2 m$.
  - ⋆ Pour une masse ponctuelle $\mathrm{d}m$ située à une distance r de l'axe Ox : $J_{Ox} = r^2 \mathrm{d}m$.
  - ⋆ Enfin, pour un solide on somme sur toutes les petites masses qui le composent :

$$\boxed{J_{Ox} = \int_{M \in \text{solide}} r^2 \mathrm{d}m \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]}$$

  r est la distance entre le point M et l'axe Ox (le r des coordonnées cylindriques d'axe Ox).

- **Moment d'une force** par rapport un axe Ox :
  Soit $\vec{F}$ la force, M son point d'application, $\vec{e}_x$ le vecteur qui porte l'axe Ox. On définit :

$$\boxed{\mathcal{M}_{Ox}(\vec{F}) = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_x.}$$

- **Moment cinétique** d'un solide par rapport un axe Ox :
  - ⋆ Pour une masse ponctuelle m repérée par le point M : $\mathcal{L}_{Ox} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{e}_x$.
  - ⋆ Pour un solide on somme sur toutes les petites masses qui le composent, et on montre que l'on aboutit à :

$$\boxed{\mathcal{L}_{Ox} = J_{Ox}\,\dot{\theta},}$$

  avec θ l'angle de rotation du solide autour de l'axe Ox.
  - ⋆ Autre notation pour le moment cinétique : σ_{Ox}.

- **Énergie cinétique** du solide en rotation autour d'un axe **fixe** Ox :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_{Ox} \dot{\theta}^2.}$$

  Remarque : si le solide a un mouvement de translation, et dans son référentiel du centre de masse un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Gx (G centre de masse du solide), alors

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Gx} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2,$$

  avec M la masse totale du solide et v_G la vitesse de son centre de masse.

- **Énergie potentielle de pesanteur :**

$$\boxed{E_{\mathrm{p,pes}} = M g z_G,}$$

  avec z_G l'altitude du centre de masse G du solide (l'axe z est vers le haut).

Théorèmes reliant les grandeurs précédentes

On suppose travailler dans un référentiel galiléen.

- **Théorème du moment cinétique :**

  Le solide est en rotation autour d'un axe Ox fixe. On a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{Ox}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_{Ox}.}$$

- **Théorème de l'énergie mécanique :**

  Si toutes les résultantes des forces s'appliquant sur le solide sont conservatives, alors

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \text{cst.}}$$

  Remarque : C'est typiquement le cas lorsque le solide est soumis à la pesanteur ($E_{\text{p,pes}} = Mgz_G$ si axe z vers le haut), à l'action d'un ressort, et à l'action d'une liaison pivot supposée parfaite (la puissance associée est nulle, l'énergie potentielle également).

Révisions

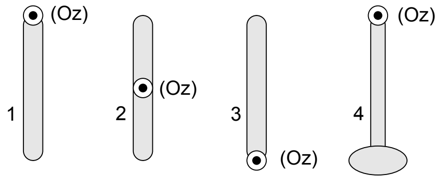
DM 20 – Révisions de mécanique : mesure de la pesanteur

L'objectif est d'étudier deux méthodes de mesure de la pesanteur g en un point à la surface de la Terre. Ces méthodes utilisent tour à tour deux types différents de pendule.

I.1 Questions introductives

1. **a -** Rappeler la définition du moment d'inertie J d'un solide par rapport à un axe (Oz), ainsi que son unité SI.

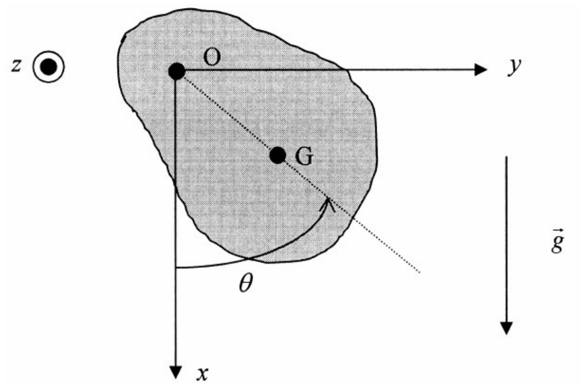
b - On considère les quatre solides ci-contre, tous de même masse et faits dans le même matériau. Classer les moments d'inertie par ordre croissant.



2. Donner l'énoncé du théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe (Oz) fixe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.

I.2 Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à cet axe.
Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante. On notera a la distance OG.



L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.

3. Quelle est la trajectoire d'un point de ce pendule ?

On note $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du pendule. Donner la relation entre la norme de la vitesse d'un point M, la distance OM, et $\dot{\theta}$.

4. Dessiner l'allure du portrait de phase de ce pendule. On indiquera les trajectoires du portrait de phase qui correspondent à un mouvement pendulaire, et celles qui correspondent à un mouvement de révolution.

5. **a -** En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

b - En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, g et a.

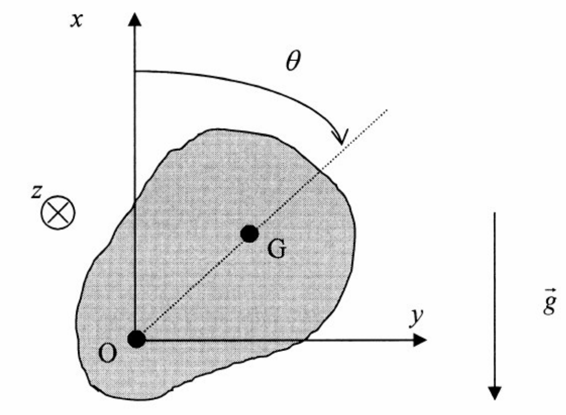
6. On souhaite étudier l'influence de la variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \dfrac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.

a - On note T la période mesurée lorsque l'intensité de la pesanteur est g, et $T' = T + \Delta T$ la période mesurée lorsqu'elle vaut $g' = g + \Delta g$.
Exprimer T' en fonction de T et de $\Delta g/g$.
On rappelle qu'on a au premier ordre en ϵ : $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1+\alpha\epsilon$. Attention, ϵ est nécessairement une grandeur sans unité.

b - Déterminer l'expression de la sensibilité s en fonction de Δg et g.

I.3 Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule où K est une constante positive.
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante (**attention**, les conventions ont donc changé par rapport à la partie précédente).



On effectue les mêmes hypothèses que précédemment (référentiel galiléen, aucun frottements).

L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de θ et est donnée par $E_p = \frac{1}{2}K\theta^2$.

7. a - En considérant un point matériel de masse m, établir l'expression du travail de la force de pesanteur pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}x\,\vec{e}_x$.

b - En déduire que l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression $E_{\mathrm{p,pes}} = mgx + \mathrm{cst}$.

c - Dans le cas du pendule, montrer que celle-ci peut s'écrire $E_{\mathrm{p,pes}} = mga\cos\theta$.

8. a - Exprimer l'énergie mécanique totale $E_m(\theta, \dot{\theta})$ du système pendule-ressort.

b - En déduire l'équation du mouvement du pendule.

9. a - En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à respecter pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous la forme d'une relation entre K, m, g et a.

b - Montrer que la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$ est $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{K - mga}}$.

10. On considère que la condition précédente est vérifiée. On veut déterminer la sensibilité s_1 de ce pendule, que l'on définit de la même façon que précédemment. Les calculs étant un peu plus compliqués que dans le cas précédent, on procède en plusieurs étapes :

11. a - On considère encore $T' = T + \Delta T$. Exprimer $\dfrac{1}{T^2} - \dfrac{1}{T'^2}$ en fonction de ΔT et de T seulement.

b - Indépendamment de la question précédente, exprimer $\dfrac{1}{T^2} - \dfrac{1}{T'^2}$ en fonction de K, m, g, a, J, et Δg.

c - Conclure en donnant l'expression de la sensibilité $s_1 = \dfrac{\Delta T}{T}$ en fonction de K, m, g, a et Δg.

12. Montrer que ce pendule avec ressort de rappel permet, sous une condition portant sur K et d'autres grandeurs à préciser, d'obtenir une sensibilité plus grande que celle du pendule sans ressort.