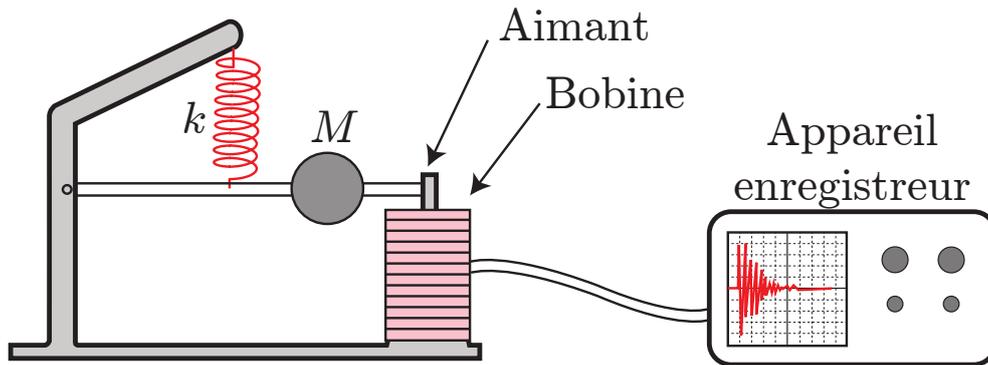


Exercice – Étude et modélisation d'un sismomètre

Objectif : Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique.

L'appareil incontournable pour suivre les mouvements du sol, liés par exemple aux séismes, est le sismomètre, et on se propose ici d'en décrire le principe de fonctionnement comme illustration d'une application pratique de filtrage.



Un sismomètre est un appareil capable de détecter de très petits mouvements du sol et de les enregistrer, analogiquement ou numériquement, en suivant une base de temps très précise. Il fonctionne sur le même principe qu'un oscillateur amorti. L'enregistrement du mouvement de la masse en fonction du temps correspond au sismogramme. Un sismomètre est constitué d'un oscillateur mécanique ; l'excitation de cet oscillateur étant due aux mouvements du sol. Les mouvements de la partie mobile engendrent un courant électrique dans un bobinage, ce qui a deux effets importants :

- amortir les oscillations mécaniques et éviter donc une prolongation excessive du mouvement après une excitation brève ;
- fournir un signal électrique qui peut être aisément amplifié, enregistré et transmis.

Le mouvement du sol $x_{\text{sol}}(t)$ est lié au mouvement de la masse décrit par $s(t)$ par l'équation suivante, caractéristique des oscillateurs amortis :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = A\ddot{x}_{\text{sol}}, \quad (1)$$

où Q est le facteur de qualité du système, ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et A est l'amplification.

Vu la forme du second membre, on peut remarquer que déplacer le sismomètre à vitesse constante n'engendre aucune détection : ce sont les accélérations qui provoquent une réponse. Un sismomètre est donc simplement un accéléromètre.

Un sismomètre ne doit pas privilégier de fréquence : il ne doit pas y avoir de phénomène de résonance. Le choix du sismologue est donc de se rapprocher juste en dessous de l'amortissement critique pour que l'oscillation repasse par zéro rapidement.

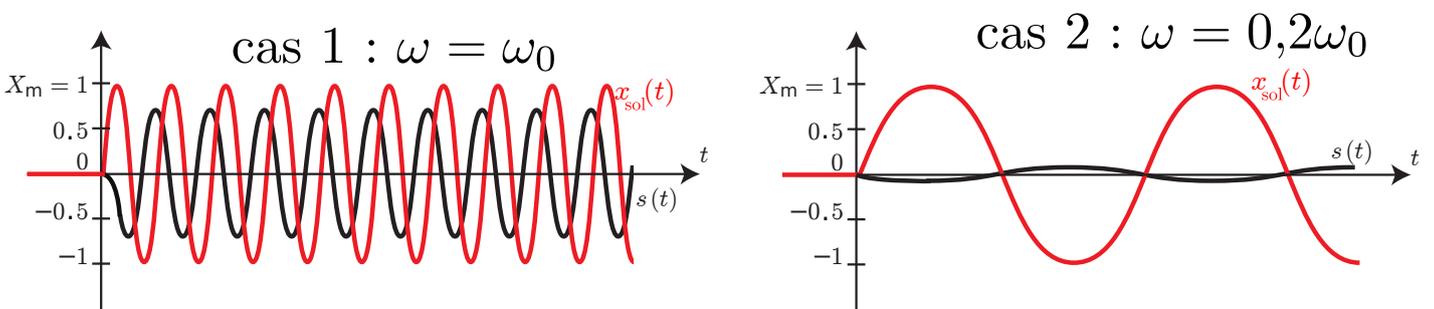
- 1 - À partir de l'équation du mouvement, établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{x}_{\text{sol}}}$ du sismomètre.
- 2 - De quel type de filtre s'agit-il? Quel est son ordre?
- 3 - Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude et en phase. Que vaut $\arg(\underline{H})$ en $\omega = \omega_0$? Donner ensuite l'allure de ces deux diagrammes (on admet qu'il y a une résonance pour Q assez grand : tracer un cas avec résonance et un cas sans résonance).
- 4 - D'après le texte, comment faut-il choisir le facteur de qualité d'un sismomètre?

Examen d'oscillogrammes tests

On poursuit l'étude par l'examen d'un oscillogramme correspondant à un signal test usuel dans le domaine de la sismologie : le train d'onde. Le signal $x_{\text{sol}}(t)$ correspondant est représenté ci-dessous :

- il est nul aux instants négatifs ;
- puis il oscille à la pulsation ω à partir de $t = 0$, avec l'expression $x_{\text{sol}}(t) = X_m \sin(\omega t)$ (on considère donc une seule composante harmonique).

Comparons les réponses simulées pour la valeur $Q = 1/\sqrt{2}$ et différentes pulsations d'excitation (ici $A = 1$, et les ordonnées sont en unités arbitraires : $X_m = 1$) :



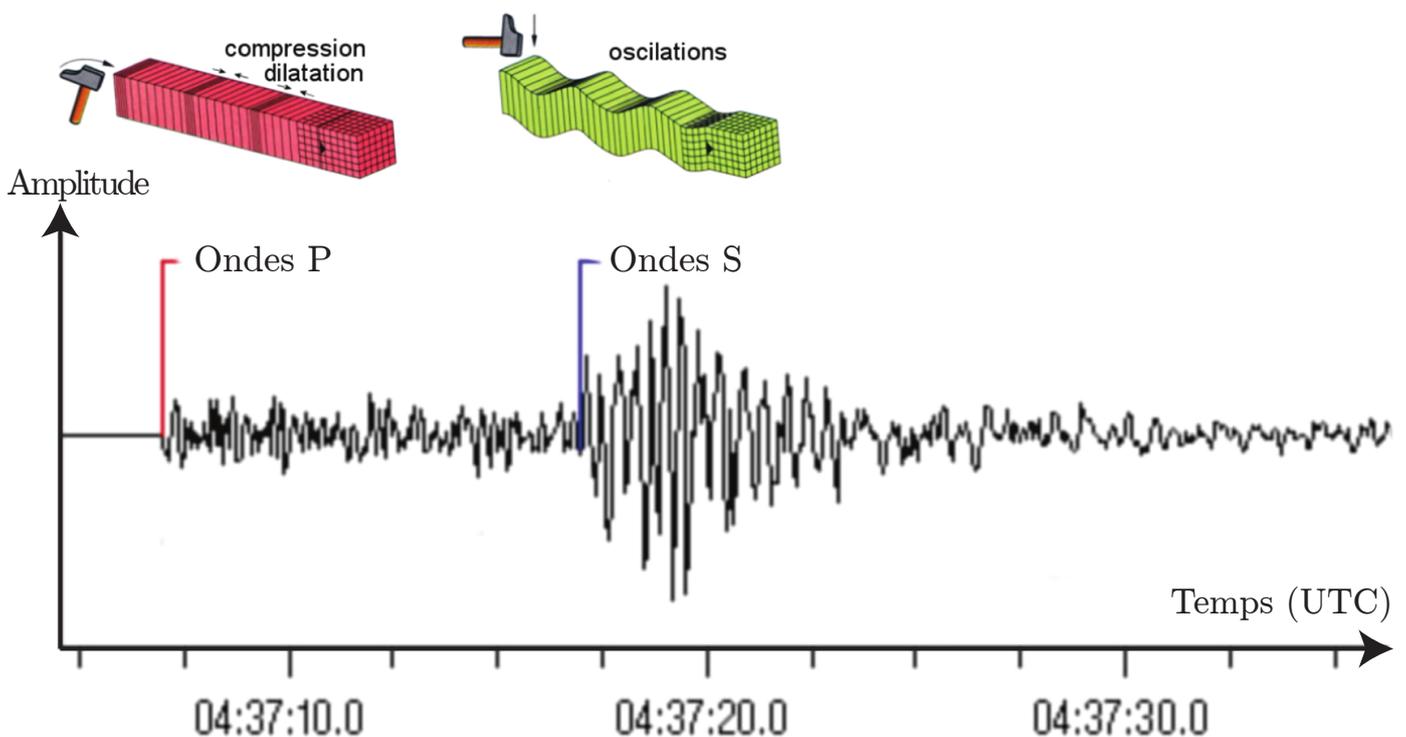
- 5 - Calculer le gain et le déphasage théoriques pour $\omega = \omega_0$. On s'intéresse alors aux courbes $x(t)$ et $s(t)$ sur l'oscillogramme correspondant à $\omega = \omega_0$: ces courbes sont-elles en accord avec la théorie? (en terme d'amplitude et de déphasage)
- 6 - Même question pour l'oscillogramme correspondant à $\omega = 0,2\omega_0$.

Applications aux ondes sismiques

Les ondes sismiques sont des ondes mécaniques. Les vibrations engendrées par un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue les ondes de volume qui traversent la Terre et les ondes de surface qui se propagent parallèlement à sa surface. On ne considère par la suite que les ondes de volume. Elles se propagent à l'intérieur du globe. Leur vitesse de propagation dépend du matériau traversé et d'une manière générale elle augmente avec la profondeur. L'onde P, ou onde primaire est, comme son nom l'indique, l'onde

qui arrive la première, elle est aussi appelée onde de compression ou onde longitudinale. Le déplacement du sol qui accompagne son passage se fait par dilatation et compression successives, parallèlement à la direction de propagation de l'onde. C'est la plus rapide (environ 6,15 km/s près de la surface). Elle est responsable du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre. C'est cette onde qui sonne l'alerte du tremblement de terre, mais ce n'est pas la plus dangereuse.

En effet c'est l'onde S secondaire qui arrive quelques secondes plus tard qui est plus destructrice car elle est transversale et non longitudinale comme l'onde P. À son passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Cette onde ne se propage pas dans les milieux liquides, elle est en particulier arrêtée par le noyau liquide de la Terre. Sa vitesse est plus lente que celle des ondes P (environ 3,6 km/s).



- 7 - Comment pourra-t-on distinguer les ondes de type P et de type S sur un oscillogramme ?
- 8 - Donner un ordre de grandeur de la fréquence de l'onde S à partir du sismogramme présenté dans le document.
En déduire une contrainte sur la pulsation propre du sismomètre.
- 9 - Trouver la distance entre l'épicentre et le sismomètre dans le cas du sismogramme présenté dans le document.