

Signal et spectre

I Qu'est-ce qu'un signal ?

1 - Grandeur physique.

Signal = enregistrement d'une grandeur physique intéressante

Exemples :

- signal acoustique
- .. électrique
- .. électromagnétique
- .. optique

cas particulier
cas particulier

2 - Signal périodique

- période T
- fréquence $f=1/T$
- amplitude
- valeur moyenne et efficace

II Signal harmonique

1 - Définitions

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

pulsation :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

2 - Déphasage

$$u_1(t) = u_{01} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2(t) = u_{02} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

periode T

III Spectre

1 - Décomposition d'un signal

0 $1\omega_0$ $2\omega_0$ $3\omega_0$ $4\omega_0$ pulsation (ou fréquence)

valeur moyenne

fondamental

harmoniques

2 - Exemples

3 - Ordres de grandeurs

Ce qu'il faut connaître

_____ (cours : I)

- ₁ Quelle est la relation entre la fréquence d'un signal périodique et sa période ?
- ₂ Quelle est la relation de définition de la valeur moyenne d'un signal périodique ?
- ₃ Quelle est la relation de définition de la valeur efficace d'un signal périodique ?

_____ (cours : II)

- ₄ Quelle est l'écriture mathématique générale d'un signal harmonique ? Nommer les différents paramètres qui y interviennent. Tracer l'allure du signal.
- ₅ Quelle est la relation entre la pulsation et la fréquence ? et entre la pulsation et la période ?

_____ (cours : III)

- ₆ Citer des ordres de grandeurs de fréquences dans le domaine de l'acoustique et de l'électromagnétisme. Par exemple quel est le domaine des fréquences acoustiques audibles ?

Ce qu'il faut savoir faire

_____ (cours : I)

- ₇ Associer une grandeur physique à certains types de signaux courants →

EC1

►₈ Identifier les caractéristiques d'un signal $s(t)$ sur un tracé. →

EC2

►₉ Calculer une valeur moyenne ou efficace sur un signal simple. →

EC3, TD III

_____ (cours : II)

►₁₀ Déphasage :

Reconnaître sur un tracé si un signal est en avance ou en retard par rapport à un autre.

Donner la valeur d'un déphasage étant donnée la valeur du décalage temporel entre deux signaux synchrones (donc de même période). →

TD IV

_____ (cours : III)

►₁₁ Exploiter le spectre d'un signal. →

EC4, TD V

Exercices de cours

Exercice C1 – Associer une grandeur physique à certains types de signaux courants

Donner des grandeurs physiques associées aux signaux suivants :

1 - signal acoustique ;

3 - signal électrique ;

2 - signal électromagnétique ;

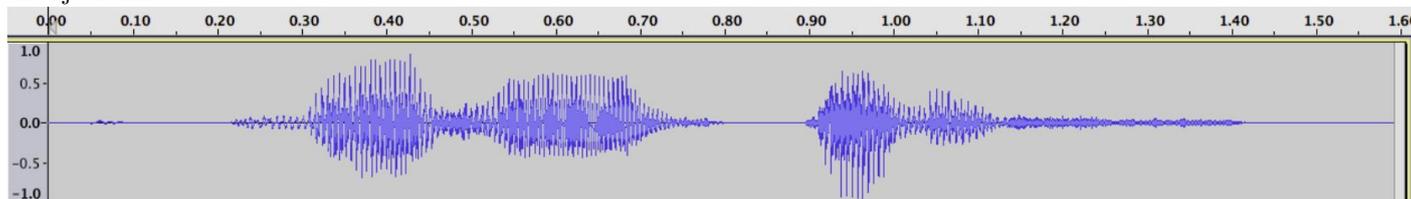
4 - signal lumineux.

Exercice C2 – Identifier les caractéristique d'un signal $s(t)$ sur un tracé

On donne ci-dessous les chronogrammes de quatre signaux sonores : les mots "Bonjour Alice" prononcés par quelqu'un, le son produit par un papier froissé, une note tenue au saxophone, et la tonalité d'un ancien téléphone fixe. L'axe des abscisses est gradué en secondes.

1 - Pour chacun des signaux, indiquer s'il semble périodique sur la durée d'acquisition, et si oui mesurer sa période et calculer sa fréquence.

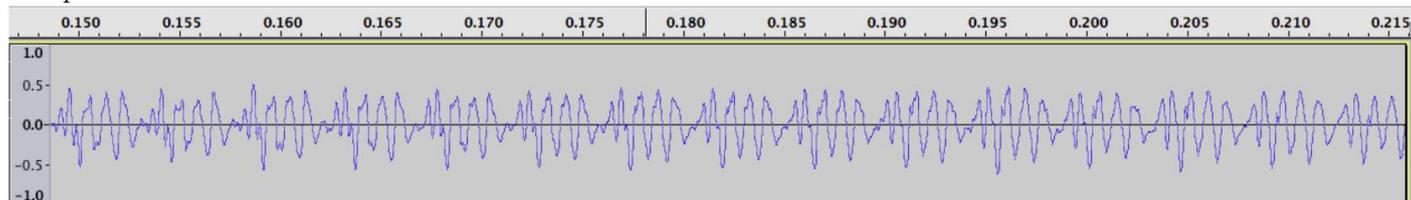
"Bonjour Alice" :



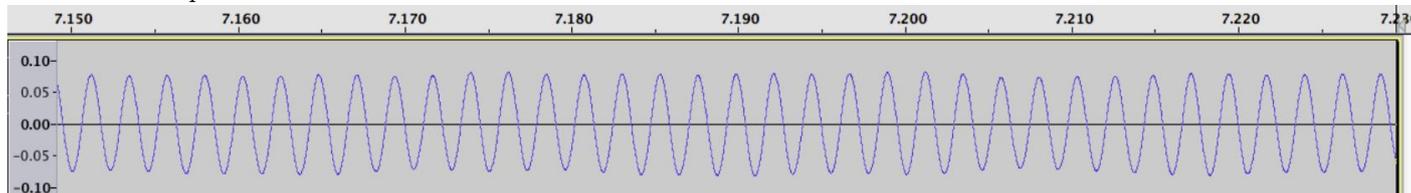
Papier froissé :



Saxophone :



Tonalité de téléphone :



(Source : Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr)

Exercice C3 – Calculer une valeur moyenne

On considère un signal créneau de période $T = 10$ s, de valeur minimale 0 V et maximale 5 V.

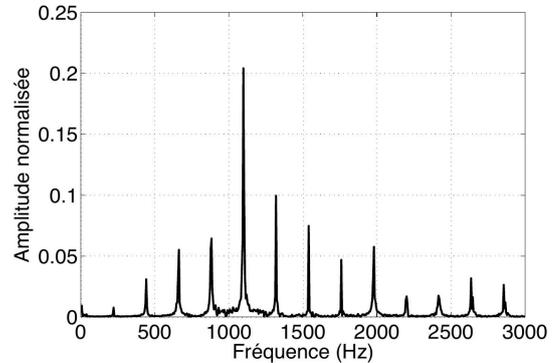
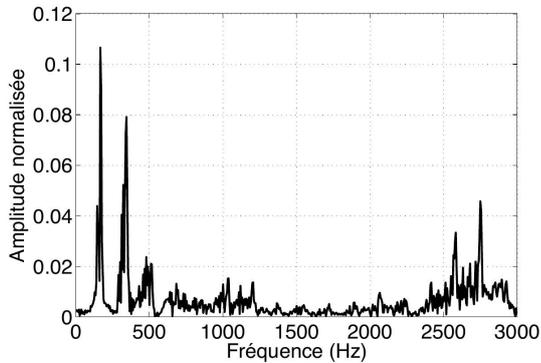
- 1 - Calculer sa valeur moyenne.

Exercice C4 – Exploiter le spectre d'un signal

On donne ci-dessous les spectres des quatre signaux de l'exercice de cours C2.

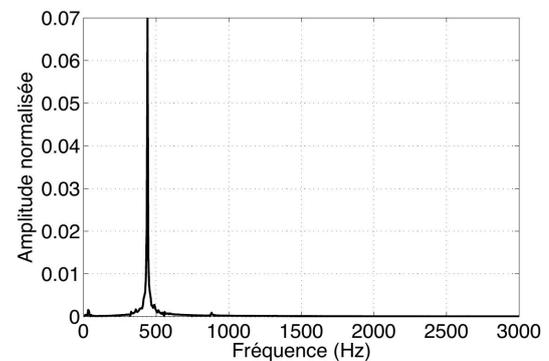
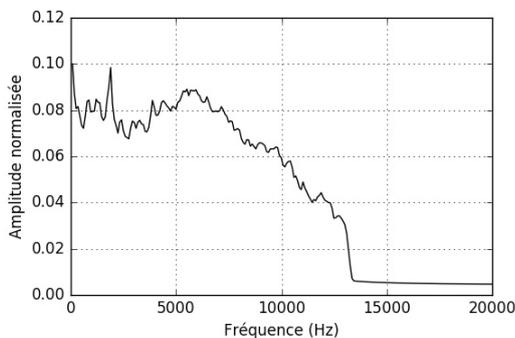
“Bonjour Alice” :

... :



Papier froissé :

... :



(Source : Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr)

- 1 - Compléter l'identification en attribuant le bon signal au saxophone et à la tonalité de téléphone.
- 2 - Quelle est la fréquence de la note jouée par le saxophone ? Et celle de la tonalité du téléphone ?
- 3 - Que dire des pics à basse fréquence sur le signal "bonjour Alice" ?

Le cours

I – Qu'est-ce qu'un signal ?

1 – Grandeur physique et signal

Définition

Grandeur physique : C'est une propriété d'un phénomène, d'un événement, d'un corps, que l'on peut exprimer par une mesure.

Exemples : la position, la vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force, etc.

Définition

Signal : Il s'agit de l'enregistrement d'une grandeur physique intéressante.

“Intéressante” est une notion subjective. Une grandeur peut être intéressante pour traiter un problème, mais pas pour un autre.

Exemples de signaux :

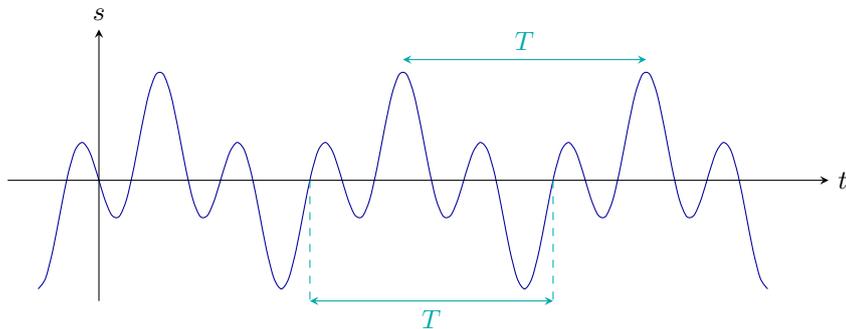
Type de signal	Grandeurs physiques associées
signal acoustique	
signal électromagnétique	
signal électrique	
signal lumineux	

2 – Cas particulier : le signal périodique

a/ Définition, période et fréquence

Définition

Exemple :

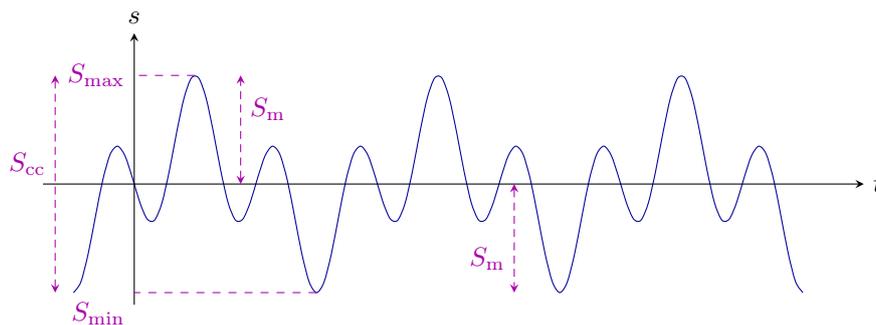


→ Voir **EC2** pour d'autres exemples.

b/ Amplitudes

Les grandeurs suivantes permettent de caractériser un signal périodique :

- Les valeurs minimale S_{\min} et maximale S_{\max} .
- La valeur crête à crête $S_{cc} = S_{\max} - S_{\min}$.
- L'amplitude S_m dans le cas où le signal est symétrique.



c/ Valeur moyenne

Considérons le signal périodique ci-contre.

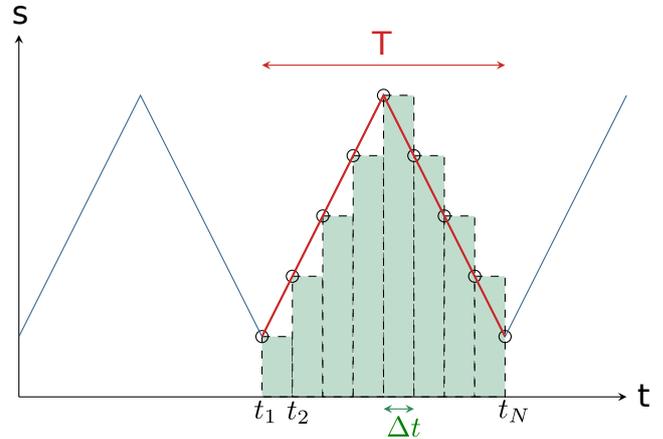
Sa valeur moyenne est égale à la valeur moyenne sur une période.

On peut la calculer de manière approchée en considérant des instants t_1, t_2, \dots, t_N comme sur la figure ci-contre.

La valeur moyenne vaut alors :

$$\langle s(t) \rangle \simeq \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} s(t_i).$$

(on fait simplement la moyenne des points ; on ne compte pas $s(t_N)$ car il est identique à $s(t_1)$).



On comprend bien que plus on prend un nombre N de points grand, plus on aura une approximation précise de ce qu'est la valeur moyenne. En fait, pour avoir la valeur exacte, il faut que $N \rightarrow +\infty$, et nous allons voir que ceci fait apparaître une intégrale.

Faisons pour cela quelques manipulations. On introduit d'abord l'écart Δt :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^{N-1} s(t_i)\Delta t$$

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N-1} s(t_i)\Delta t.$$

On passe ensuite à la limite où $N \rightarrow +\infty$, donc où $\Delta t \rightarrow 0$. La somme devient alors égale à l'aire sous la courbe, et est donnée par l'intégrale suivante (cf méthode des rectangles en mathématique) :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N s(t_i)\Delta t = \int_{t_1}^{t_N} s(t)dt.$$

On obtient donc : $\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_N} s(t)dt.$

Finalement, on retiendra ce qui suit :

Définition

Valeur moyenne d'un signal $s(t)$ de période T :

(indépendant du choix de t_0)

Propriétés

Vue la définition de la moyenne et les propriétés de l'intégrale, on a :

-
-

Exemple : calcul pour un signal créneau (cf **EC3**).

d/ Valeur efficace

Définition

Valeur efficace de $s(t)$:

Remarque :

- On l'appelle aussi valeur RMS pour "Root Mean Square".
- Si on omet la racine carrée, on parle de valeur quadratique moyenne (donc pour la quantité $\langle s(t)^2 \rangle$).
- La valeur efficace intervient lorsqu'on s'intéresse à l'énergie d'un signal, car souvent il apparaît un carré. Par exemple avec l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$, alors $\langle E_c \rangle$ fait intervenir la moyenne quadratique de v .

On a $\langle (s_1(t) + s_2(t))^2 \rangle = \langle s_1(t)^2 + 2s_1(t)s_2(t) + s_2(t)^2 \rangle \neq \langle s_1(t)^2 \rangle + \langle s_2(t)^2 \rangle$, donc les valeurs efficaces ne s'ajoutent pas !

Exemple : calcul pour un signal créneau (cf **EC3**).

II – Signal harmonique

1 – Définitions

Définition

Propriétés

Démonstration :

Autres écritures :

- ▶ $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$
- ▶ $s(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ (même ω dans le cos et dans le sin)

Par abus de langage, on dit aussi parfois qu'un signal $s(t) = S_1 + S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est aussi un signal harmonique, même s'il y a présence d'un terme constant S_1 .

Une animation permettant de faire varier les paramètres : <https://www.geogebra.org/m/xvtS8qV8>.

Valeur moyenne et efficace :

On peut calculer (en utilisant la définition avec l'intégrale) que :

$$\text{▶ } \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0, \quad \text{▶ } \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

Donc si $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors

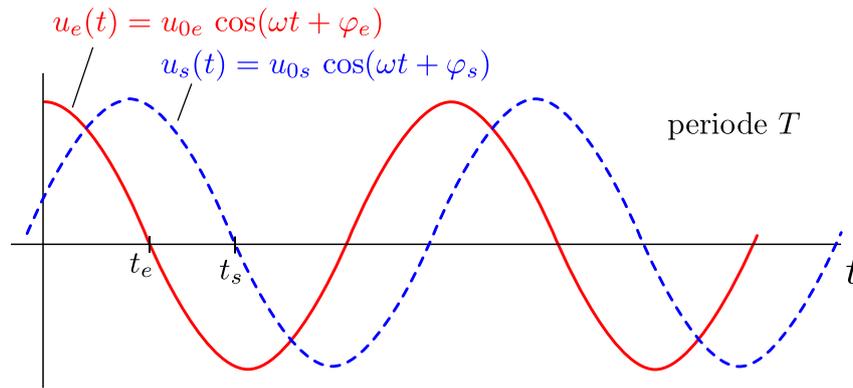
$$\langle s(t) \rangle = S_0 \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = 0$$

et

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{S_0^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}.$$

2 – Déphasage entre signaux harmoniques

On considère deux signaux sinusoïdaux de même période, et donc de même pulsation ω :



Les signaux ayant même pulsation, ils sont dits **synchrones**.

Définition

Méthode : mesurer un déphasage entre deux signaux

On repère deux instants consécutifs (les plus proches possibles) où les signaux passent par 0. On les note t_e et t_s .

Le signal d'entrée sert de référence.

Le déphasage entre sortie et entrée est donné par :

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \omega(t_s - t_e)$$

Remarques :

- ▶ À la place de deux passages par 0, on peut tout aussi bien choisir deux maximum, ou deux minimum. C'est même obligatoire si les signaux ne sont pas centrés sur 0 (pas de moyenne nulle).
- ▶ Tout comme φ_s et φ_e , le déphasage est défini à 2π près.
- ▶ Sur l'exemple ci-dessus, la sortie est en retard sur l'entrée, car elle passe par 0 après l'entrée (t_s est après t_e). On a alors $t_s > t_e$ et donc $\varphi_s - \varphi_e < 0$.

Exemple : $\varphi_e = 0$ et $\varphi_s = -\pi/3$, alors $u_s(t) = u_0 \cos(\omega t - \pi/3)$, qui est en retard de $+\pi/3$ par rapport à $u_e(t) = u_0 \cos(\omega t)$.

- ▶ (chapitre à venir : $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ est aussi l'argument de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{u_{0s}}{u_{0e}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$.)

Démonstration de la méthode :

Repérons les maximum :

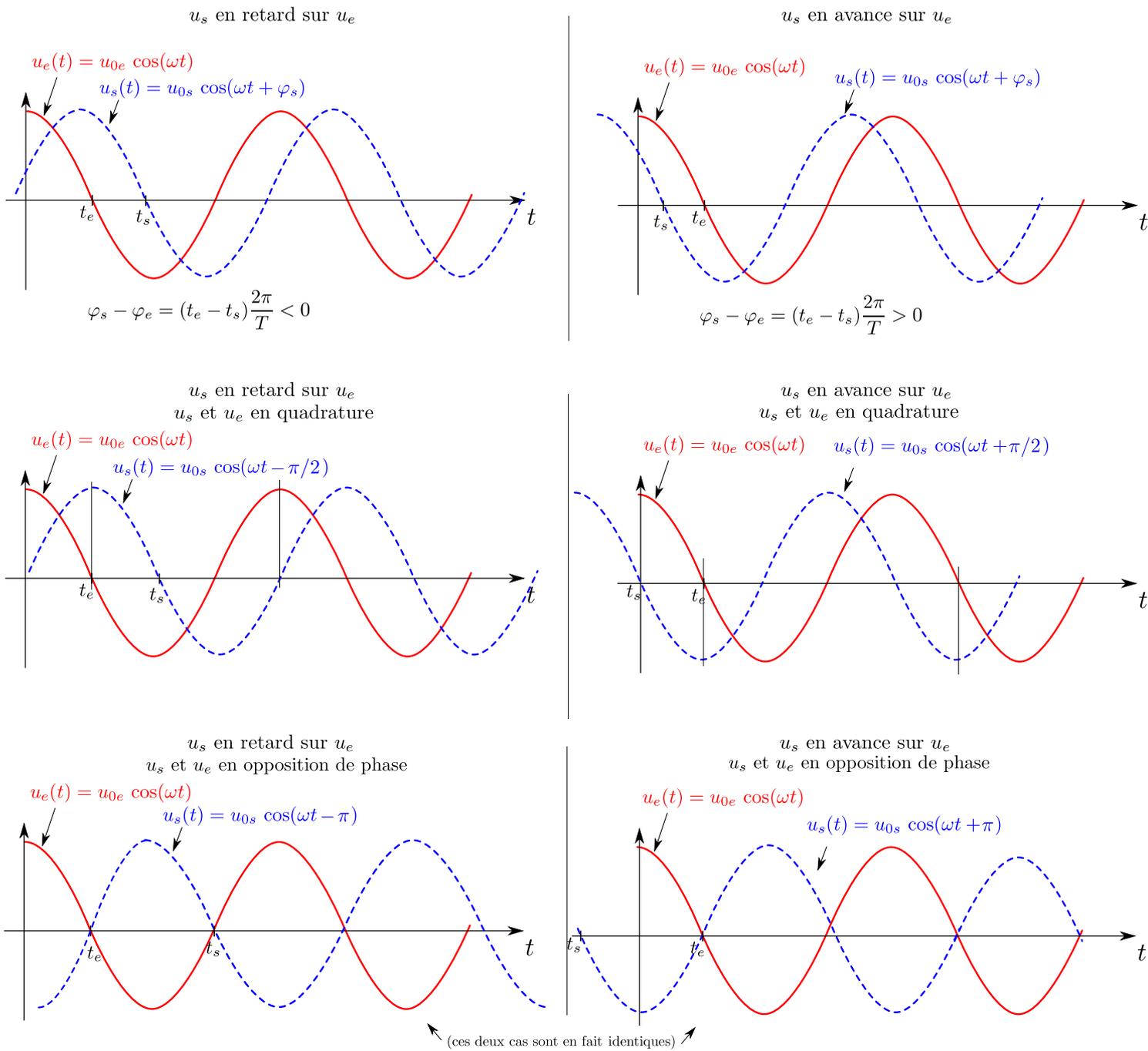
$u_e = u_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$ est maximal en $\omega t + \varphi_e = 0$, donc en $t_e = -\varphi_e/\omega$.

$u_s = u_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$ est maximal lorsque $\omega t + \varphi_s = 0$, donc en $t_s = -\varphi_s/\omega$.

On a donc $t_e - t_s = -\varphi_e/\omega + \varphi_s/\omega = -(\varphi_e - \varphi_s)/\omega$.

On a donc bien $\varphi_s - \varphi_e = \omega(t_e - t_s)$.

Quelques exemples particuliers :



III – Spectre

1 – Décomposition d'un signal

a/ Cas d'un signal périodique

Propriétés

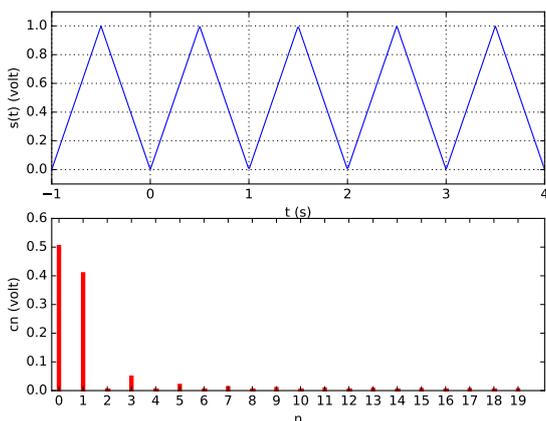
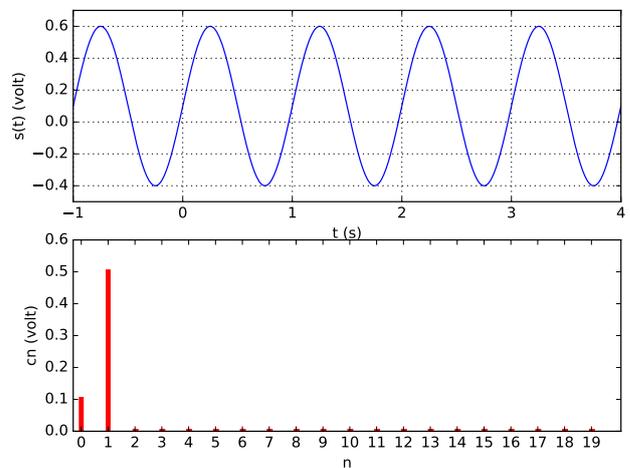
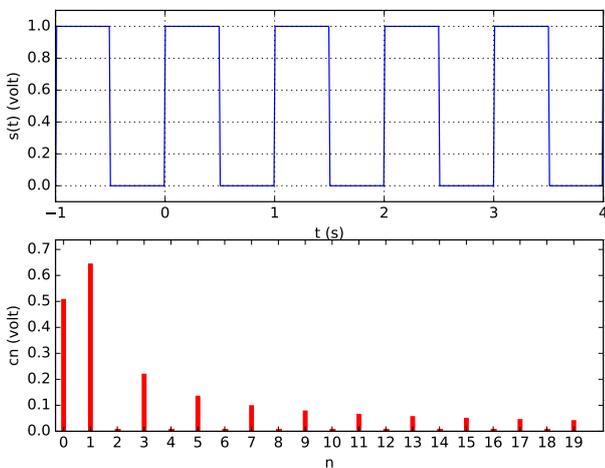
Décomposition de Fourier : Soit $s(t)$ un signal périodique de période T , et soit $f_0 = 1/T$ sa fréquence et $\omega_0 = 2\pi f_0$ sa pulsation.

Définition

Le tracé de l'amplitude c_n de chaque composante en fonction de sa fréquence (ou de sa pulsation, ou de n) est le spectre du signal.

(On peut parfois, en plus, tracer les phases φ_n en fonction de n .)

Exemples :



Remarque : Il existe des formules dans des cas simples.

Par exemple pour le signal créneau ci-dessus, on a $c_n = \frac{2}{\pi n}$ si n impair et $c_n = 0$ si $n > 0$ pair. Pour le signal triangle, on a $c_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}$ si n impair et $c_n = 0$ si $n > 0$ pair.

b/ Cas d'un signal quelconque

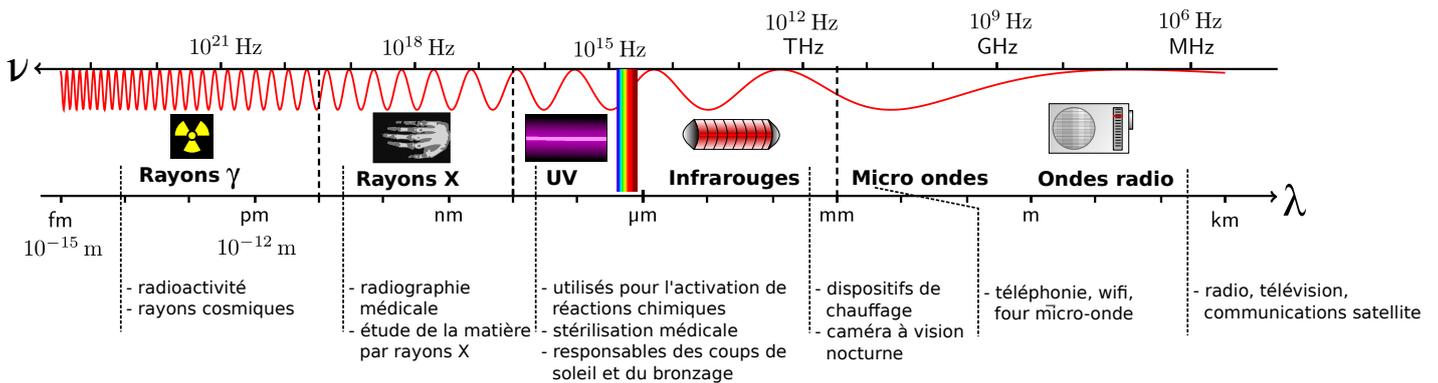
Dans le cas d'un signal non périodique, une décomposition similaire existe. Cette fois le signal se décompose comme une somme continue de signaux harmoniques de toutes les fréquences (et non plus de multiples entiers de $f = 1/T$ seulement). On peut donc toujours tracer son spectre.

2 – Exemples

Voir EC4.

3 – Ordres de grandeur

a/ Signaux électromagnétiques

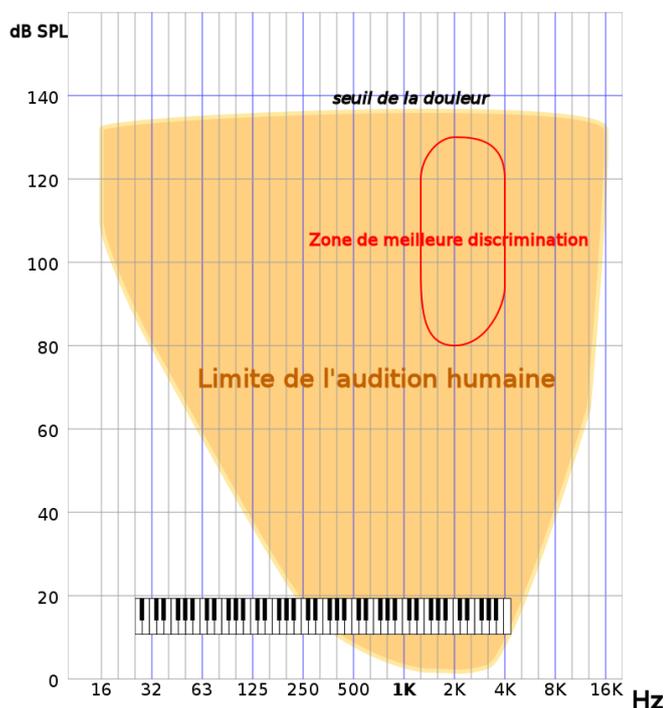


(source : Wikipedia)

On retiendra les points suivants :

- Fréquence du réseau électrique français : 50 Hz.
- Fréquence radio FM : quelques 100 MHz.
- Fréquence téléphonie mobile, wifi, four à micro-onde : 1 à 10 GHz.
- Spectre de la lumière visible : $\sim 10^{15}$ Hz.

b/ Signaux acoustiques



On retiendra que le spectre audible se situe entre 20 Hz et 20 kHz.

(source : Wikipedia)