

Questions “résolution de problème” des sujets CCS

Introduction

Extrait du rapport de l'épreuve 2018 :

Insistons ici encore une fois sur les questions repérées dans les sujets comme étant ouvertes (et chronophages) comme la question 21 en rappelant :

- que les éléments de réponse sont “valorisés même s'ils n'ont pas abouti” ;
- que “le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer les pistes et élaborer un raisonnement”.

S'il peut être pertinent de différer ce temps de réflexion et de résolution, c'est un bien mauvais calcul de l'ignorer simplement. Quelques informations judicieusement repérées dans les documents, quelques pistes de calcul des quantités de chaleur perdues et le candidat augmentait sa note finale en moyenne de 10%.

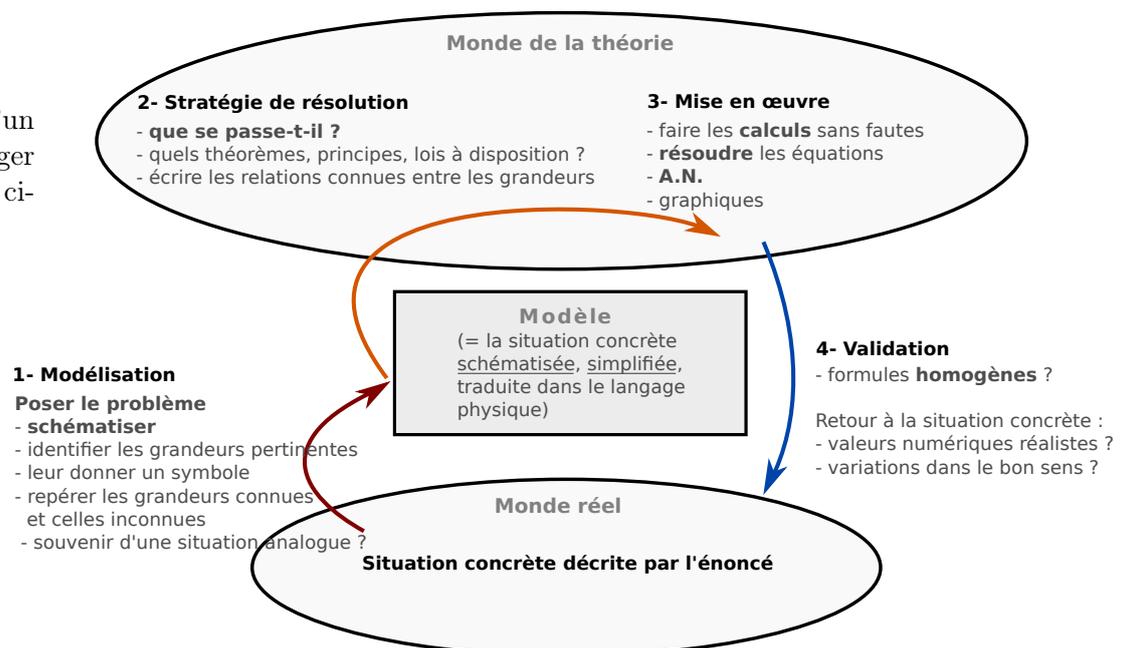
[...]

Q21. Cette question représentait 10% du barème total ! Donc, il faut oublier le caractère chronophage et tenter une résolution même partielle.

Mes conseils sur ces questions moins guidées :

- Leur consacrer un peu de temps (de 10 à 20 minutes), mais pas trop.
- Réfléchir au brouillon, puis reporter sur la copie de façon propre des pistes de raisonnement (Rappel en 2018 : “Quelques informations judicieusement repérées dans les documents, quelques pistes de calcul des quantités de chaleur perdues et le candidat augmentait sa note finale en moyenne de 10%”).
- Ne pas trouver la solution n'est pas grave du tout !

Lors de la résolution d'un exercice, on peut dégager les 4 grandes étapes ci-contre.



I TSI 2015 – Impact de météorite

Données : $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, masse de la Terre $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$, rayon terrestre $R_T = 6400 \text{ km}$.

III.B.1) Estimation de la vitesse relative

Dans le modèle cinétique d'accrétion, un des paramètres importants est la vitesse relative des astéroïdes par rapport à l'astre en accrétion. On cherche à estimer l'ordre de grandeur de cette vitesse relative. On envisage le cas d'une collision entre la Terre et un astéroïde rocheux.



Figure 9 Meteor Crater (Arizona) de diamètre 1,2 km dû à l'impact d'une météorite de 150 m de diamètre. Source : Shane.torgerson via Wikimedia Commons

Cette partie constitue un problème non guidé contenant essentiellement une question préliminaire, une question principale et une question d'analyse. Il est nécessaire de consacrer un temps assez important à ces trois questions, celles-ci étant largement rétribuées. Les variables intervenant dans le problème ne sont volontairement pas toutes définies. Le candidat est invité à définir les variables qu'il jugera pertinentes, à les nommer et, si nécessaire, à les estimer.

a) Construire, par analyse dimensionnelle, une expression littérale permettant d'estimer l'ordre de grandeur de la portée d'un corps lancé à une vitesse v_0 dans un champ de gravité uniforme g_0 . Il s'agit de la distance horizontale parcourue par le corps entre le moment où il est lancé à la vitesse v_0 et celui où il retombe sur le sol.

b) Proposer un modèle qui permette d'estimer littéralement l'ordre de grandeur du diamètre du cratère formé sur la Terre par un astéroïde métallique arrivant frontalement à la vitesse v_r dans un sol sédimentaire. On pourra ou non utiliser le graphe donné figure 10, établi par Richard J. Pike à partir d'une étude de 204 cratères lunaires, qui figure l'évolution de la profondeur d'un cratère contre celle de son diamètre, ainsi que la maille élémentaire d'un métal typique, le fer.

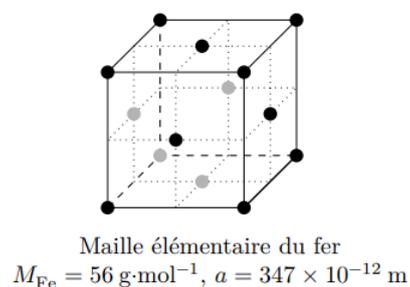
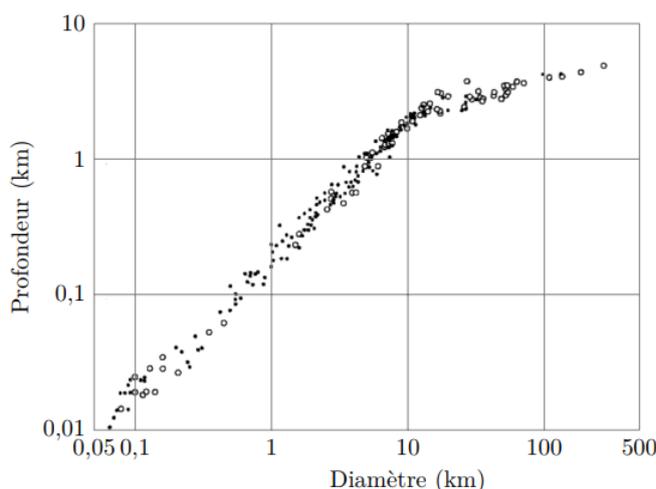


Figure 10

c) Une modélisation numérique de ce problème conduit à la loi $D = 1,161(\rho_i/\rho_t)^{1/3} L^{0,78} v_i^{0,44} g^{-0,22}$. Identifier les variables de cette loi numérique et comparer les lois de puissance de ce modèle à celles de votre modèle. Commenter.

d) En déduire la vitesse relative v_r de l'astéroïde responsable de la formation du Meteor Crater aux États-Unis (cf figure 9).

II PSI 2018 – Train à sustentation magnétique et puissance dissipée

Trains à sustentation électromagnétique

Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec des rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Il existe actuellement deux types de trains à grande vitesse à sustentation magnétique :

- un train à sustentation électromagnétique dans lequel le train lévite par attraction grâce à des aimants (Transrapid développé en Allemagne) ;
- un train à sustentation électrodynamique dans lequel le train lévite par répulsion grâce aux courants de Foucault induits par le déplacement du train (SCMaglev développé au Japon).

La seule réalisation commerciale du Transrapid est à l'heure actuelle la ligne de 30 kilomètres qui fonctionne depuis 2004 entre Shanghai et son aéroport international de Pudong. Le trajet s'effectue en moins de 8 minutes, à la vitesse moyenne de 245 km/h. Sur ce parcours le train atteint la vitesse de 430 km/h, il a la capacité d'accélérer de 0 à 350 km/h en 2 minutes.

La première version commerciale du SCMaglev doit relier en une heure Tokyo et Osaka, distantes de 400 km à vol d'oiseau. L'ouverture du premier tronçon de la ligne (Tokyo-Nagoya) est prévu en 2027 avec une vitesse de pointe sur le parcours de 505 km/h. En 2015 une rame de test de sept voitures a atteint la vitesse de 603 km/h, établissant ainsi l'actuel record de vitesse pour un train.



Transrapid



SCMaglev

I Réalisation d'un champ magnétique intense

Dans le système à sustentation électrodynamique (SCMaglev), un champ magnétique est créé par des bobines supraconductrices placées dans le train en mouvement. Le constructeur indique que pour faire léviter le train le champ magnétique produit doit dépasser la valeur de 4 teslas.

Q 1. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réaliser un tel champ magnétique avec un solénoïde constitué d'un fil résistif. Pour répondre à cette question, vous pourrez vous appuyer sur les données fournies en annexe 1. Vous préciserez clairement les différentes étapes de votre raisonnement.

On se propose d'évacuer la puissance produite par la bobine avec un refroidissement à eau.

Q 2. Proposer une valeur maximale acceptable de la différence de température entre la bobine et l'eau. En déduire la valeur minimum de la surface de contact entre la bobine et l'eau.

Q 3. Quel débit d'eau faudrait-il assurer pour évacuer la puissance thermique produite par la bobine ?

Q 4. Commenter et conclure quant à la faisabilité d'un tel refroidissement.

Q 5. En quoi l'utilisation de bobines supraconductrices permet-elle la création de champs magnétiques très intenses ?

Données et formulaire

Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Intensité du champ de pesanteur terrestre	$g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_e = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Loi de Newton du transfert conducto-convectif entre un solide et un fluide

$$P = hS\Delta T$$

où P est la puissance thermique échangée, S la surface de contact solide-fluide et ΔT la différence de température entre la surface du solide et celle du fluide très loin du solide. Pour le coefficient de transfert thermique conducto-convectif h , on prendra ici $h \approx 100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

Annexe 1

Caractéristiques du solénoïde

Diamètre D	Longueur L	Nombre de spires N	Diamètre du fil de cuivre d
0,2 m	0,5 m	10 000	2,0 mm

Données sur le cuivre

Masse volumique	$\mu = 8,96 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Capacité thermique massique	$c = 385 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Résistivité électrique	$\rho = 1,68 \times 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$
Température de fusion	$T_f = 1356 \text{ K}$

Compléments : le h donné dans l'énoncé est pour un contact avec de l'eau. Pour un contact avec de l'air h est plus faible. De plus, il faut comprendre que dans la question 1 on envisage un refroidissement naturel au contact de l'air, et que dans les questions qui suivent on envisage un refroidissement avec de l'eau.

III MP 2018 – Mesure de g et pendules

II Méthodes de mesure du champ de pesanteur à l'aide de pendules

Pour déterminer le champ de pesanteur localement, les géophysiciens disposent d'instruments appelés gravimètres. Le premier gravimètre utilisé historiquement a été un pendule.

II.A – Le pendule de Richter

Q 10. Pourquoi l'utilisation d'un pendule simple (figure 2) permet-elle de remonter à la mesure de l'intensité du champ de pesanteur g ?

Q 11. En 1672 l'astronome Richter part à Cayenne en Guyane avec une horloge à pendule réglée à Paris (pendule qui bat la seconde), il s'aperçoit qu'elle retarde de 2 min 28 s par jour. En déduire la valeur de g à Cayenne (à Paris $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$).

Pour quelle(s) raison(s) les valeurs de g sont-elles différentes à Cayenne et à Paris ? L'altitude de Paris varie entre 28 et 131 m et l'altitude de Cayenne entre 0 et 105 m.

Q 12. On admet que l'incertitude de mesure provient essentiellement de la mesure de la période T . Quelle devrait être l'incertitude sur la mesure de la période du pendule utilisé par Richter pour que l'incertitude sur la mesure de g soit égale à 1 μgal (ordre de grandeur de la précision des gravimètres actuels).

II.B – Le pendule vertical

La mesure de l'élongation d'un ressort vertical au bout duquel est suspendue une masse permet de mesurer les variations du champ de pesanteur. L'ingénieur Lucien LaCoste a inventé un ingénieux ressort à spirale de longueur au repos nulle (figure 3).

Q 13. Si le champ de pesanteur terrestre varie de 10 μgal , que vaut la variation de l'élongation d'un ressort usuel d'un laboratoire de lycée ?

Q 14. Quel est l'intérêt d'utiliser un ressort de longueur au repos nulle ?

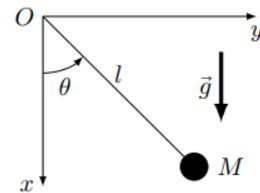


Figure 2

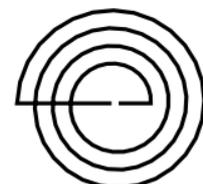


Figure 3

IV TSI 2018 – Bilan thermique de refroidissement d'un bassin

II Éviter les pertes

Pour des centres aquatiques équipés de bassins extérieurs chauffés, les coûts de chauffage sont très importants. Une solution simple de réduction des coûts consiste en l'installation de couvertures de surface amovibles. À l'ouverture du centre aquatique, la couverture est positionnée sur son enrouleur. Après la fermeture, elle est déployée à la surface de l'eau. La figure 6 montre un bassin équipé de deux couvertures dont l'une est déployée et l'autre encore enroulée.

À partir des documents 1 à 3, on se propose de chiffrer les gains d'énergie obtenus avec l'utilisation des couvertures thermiques et de les comparer aux gains escomptés.

Q 19. Déterminer l'expression de la résistance thermique de la couverture en fonction de λ , e et S , la surface du bassin.

Q 20. Déterminer l'expression de la résistance thermique associée aux transferts thermiques convectifs à la surface du bassin en fonction de h et S .

Q 21. Évaluer numériquement les pertes d'énergie annuelles sans, puis avec, utilisation de la couverture thermique. Chiffrer les gains d'énergie obtenus et comparer avec les gains escomptés.



Figure 6

— Document 1 : Extrait d'un article de la Nouvelle République —

6 janvier 2014

Le centre aquatique du Lac n'a rouvert que ce week-end, après quelques jours consacrés à des vérifications techniques et sanitaires : chaufferie, tuyauteries, vidange des bassins. Les usagers ont pu découvrir un nouvel équipement posé vendredi à une extrémité du grand bassin extérieur. Le jour, deux couvertures de surface en PVC sont sagement lovées sur leur enrouleur. Après la fermeture, elles sont déployées à la surface de l'eau, sur toute la longueur du bassin.

Un assemblage de 590 lattes

Cette double protection présente un caractère innovant, finalement assez peu répandu dans les structures aquatiques de plein air. C'est la raison pour laquelle le délégataire se veut prudent : « Il est compliqué de mesurer les économies d'énergie mais on peut évaluer des gains allant de 15 à 40%. Nous allons installer un compteur de gaz par bassin (contre un seul aujourd'hui). Le niveau des consommations sera ainsi mieux contrôlé. Les variations de température — et donc l'évaporation de l'eau — seront mieux contenues grâce aux 590 lattes », ajoute le directeur du centre aquatique.

— Document 2 : Caractéristiques du bassin extérieur et de la couverture thermique —

Bassin

Longueur du bassin	50 m
Largeur du bassin	20 m
Température moyenne de l'eau	27 °C

Le bassin extérieur est exposé au vent. Il est ouvert toute l'année de 7h à 21h du lundi au vendredi et de 9h à 19h les samedi et dimanche. Il est fermé deux semaines par an pour vidange des bassins et inspection des installations techniques.

Couverture thermique

Conductivité thermique	$\lambda = 0,027 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Épaisseur moyenne	$e = 15 \text{ mm}$

Avec une couverture thermique, les pertes par rayonnement sont négligeables.

— Document 3 : Les échanges thermiques eau/air extérieur —

Les déperditions thermiques d'un bassin extérieur se font essentiellement par évaporation, par rayonnement et par convection.

Généralement, l'évaporation compte pour environ 40% de la déperdition thermique totale, le rayonnement pour environ 30%.

Les transferts thermiques par convection se font selon la loi de Newton : la puissance thermique dP cédée par l'eau de température T_e à l'air de température T_a à travers une surface dS est $dP = h(T_e - T_a) dS$; h est le coefficient de transfert thermique de surface. Ce coefficient dépend de nombreux paramètres et varie fortement selon que la convection est naturelle ou forcée (présence de vent). Un ordre de grandeur de h pour l'air dans les conditions observées est $h = 50 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}$.

Sur le site du centre aquatique et sur une année, la température minimale moyenne observée est de $7,4 \text{ }^\circ\text{C}$ et la température moyenne de $11,8 \text{ }^\circ\text{C}$.

V TSI 2019 – Atmosphère martienne et calotte de glace

<http://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/2019/TSI/sujets/P015.pdf>

Autres remarques générales qu'il est bon de rappeler

Extrait du rapport de l'épreuve 2018 :

Enfin, beaucoup de candidats n'imaginent sans doute pas qu'ils paient un lourd tribut par l'indigence de leurs réponses ; il faut répondre complètement et précisément ! Lorsque le sujet demande d'identifier et de justifier la nature de transformations thermodynamiques, un adjectif ne suffit pas ! Lorsque il demande de déterminer l'expression d'un débit massique, une analyse dimensionnelle ne suffit pas ! Pour ne pas perdre de points, les réponses doivent être consolidées par une rédaction réellement démonstrative, nécessaire et suffisante.

[...]

Le jury déplore une dégradation dans la rédaction des copies (trop de candidats « jettent » des expressions littérales sur la copie sans aucune phrase ni explication) mais également dans la présentation.

→ Soignez la rédaction !

VI TSI 2015 – Éléments de correction

1 - $d = \frac{v_0^2}{g}$.

2 - ★ Poser le problème / modélisation du problème :

Noter les grandeurs connues, inconnues, faire des schémas, ici un schéma du cratère.

On note D son diamètre, h sa profondeur, ρ_t la masse volumique de la terre du cratère, ρ_i celle de l'astéroïde, L la taille de l'astéroïde, g la pesanteur, v_r la vitesse de l'astéroïde.

★ Stratégie de résolution :

Que se passe-t-il ? Quelles lois à disposition ?

→ Il faut raisonner en terme d'énergie. L'énergie cinétique de l'astéroïde est convertie en énergie cinétique de la terre éjectée, donc va donner à une masse M de terre une vitesse d'éjection v_t . Cette vitesse va déplacer la terre sur une distance D égale à la taille du cratère, et d'après la question précédente $D = v_t^2/g$.

Lois à disposition :

- Pour l'astéroïde : $E_c = \frac{1}{2}mv_r^2$
- Pour le volume $V = h \times \pi D^2/4$ de terre éjectée : $E_c = \frac{1}{2}\rho_t V v_t^2$.
- $D = v_t^2/g$.
- Relation entre h et D d'après le document.
- ...

★ Mise en œuvre, calculs :

...

On aboutit à $D = \text{cst} \times \left(\frac{\rho_i}{\rho_t}\right)^{1/4} L^{3/4} v_r^{1/2} g^{-1/4}$.

★ Valider, avoir un regard critique :

On vérifie que nos équations son homogène, que le diamètre de l'impact augmente si v_r ou m augmente, etc.

3 - On trouve presque pareil, l'écart le plus important étant pour les masses volumiques. Notons qu'on a négligé, dans notre modèle, le fait qu'une partie de l'énergie cinétique initiale est utilisée pour fondre tout ou partie de l'astéroïde et de la terre, ou sous forme d'onde de choc dans la terre.

4 - $v_r = 350 \text{ m/s} = 1250 \text{ km/h}$.

VII PSI 2018 – Éléments de correction

1 - ★ Poser le problème / modélisation du problème :

Noter les grandeurs connues, inconnues, faire des schémas.

★ Stratégie de résolution :

Que se passe-t-il ? Quelles lois à disposition ?

→ Pour obtenir B il faut un courant I , ce qui implique une puissance fournie par effet Joule, ce qui peut faire fondre le fil.

Lois à disposition :

- Le solénoïde produit un champ $B = \mu_0 n I$ avec $n = \frac{N}{L}$.
- Puissance volumique dissipée par effet Joule : $\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \rho j^2$ car $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (milieu ohmique) avec $\gamma = 1/\rho$ l'inverse de la résistivité.
- On pourra utiliser, pour estimer l'élévation de température, le premier principe au fil : $C_V dT = dU = P_J$ si adiabatique ; ou encore un bilan de puissance $P_J = hS(T_{\text{cable}} - T_{\text{ext}})$, nous verrons.

★ Mise en œuvre, calculs :

$$\text{On a } I = \frac{BL}{\mu_0 N}.$$

Le fil a une longueur $l = N \times \pi D$ et un volume $N\pi D \times \frac{\pi d^2}{4}$.

$$P_J = \frac{\pi^2}{4} N D d^2 \times \rho j^2 = \frac{\pi^2}{4} N D d^2 \times \rho \frac{I^2}{(\pi d^2/4)^2} = 4 N D \rho \frac{I^2}{d^2}, \text{ d'où}$$

$$\boxed{P_J = \frac{4 D \rho B^2 L^2}{d^2 \mu_0^2 N} = 0.85 \text{ W.}} \quad (1)$$

Il faut ensuite déterminer si ceci fera fondre ou non le fil. Deux options :

- Utiliser le h donné dans l'énoncé, qui est probablement pour l'eau et pas pour l'air... et prendre pour S la surface extérieure de la bobine (le fil étant enroulé serré – 10000 tours en 0.2m d'un fil de 2mm –, on ne peut pas prendre la surface du fil) $S = \pi d \times l = \pi^2 d N D$ (on a alors une borne supérieure, car dans l'air le refroidissement est moins efficace), et dire qu'en régime permanent la chaleur évacuée est égale à celle produite P_J :

$$hS(T_{\text{fil}} - T_{\text{ext}}) = P_J, \quad (2)$$

d'où

$$T_{\text{fil}} - T_{\text{ext}} = \frac{P_J}{h \times \pi D L} = 2.7 \times 10^4 \text{ K}, \quad (3)$$

ce qui est beaucoup trop, le fil fond.

- Supposer une évolution adiabatique et estimer le temps mis par la bobine pour fondre. On trouve 17s.

★ Valider, avoir un regard critique :

On vérifie que nos équations sont homogènes, que si B augmente P_J augmente, etc.

- 2 -** Pour la bobine la température maximale est $T_f = 1356 \text{ K}$, pour l'eau le minimum est 273 K . La différence maximale est donc $\Delta T = 1083 \text{ K}$.

La surface d'échange minimale est telle que $P_J = hS\Delta T$. On trouve $S = 7.9 \text{ m}^2$.

On peut atteindre cette surface en utilisant des ailettes de refroidissement.

- 3 -** Premier principe au système ouvert {tuyau qui amène et évacue l'eau} : $c_p \Delta T = \Delta h = q$, soit une puissance évacuée $P_{\text{évac}} = P_{\text{reçue eau}} = D_m q = D_m c_p \Delta T$.

Attention, ici ΔT est la différence de température entre l'eau à l'entrée du tuyau et à la sortie. Cette différence vaut au plus 100 K , ce que l'on prend ici pour l'AN.

Or il faut que $P_{\text{évac}} = P_J$. Donc on en déduit $D_m = \frac{P_J}{c_p \Delta T} = 2.0 \text{ kg/s}$.

- 4 -** Il manque des informations pour vraiment répondre. Les bobines sont dans le train, mais combien en faut-il ? On peut supposer qu'il en faut trop, et que la consommation d'eau est trop importante.

VIII TSI 2019 – Éléments de correction

57 - Voir cours !

58 - Placer le point $T_i = 140\text{ K}$, $p = p_0$ dans le diagramme p, T . Ce point est dans la zone solide. Mais la température de Mars est de 210 K , donc le bloc va se réchauffer et passer dans la zone gaz : le bloc se sublime.

59 - Ces variations sont liées à la fonte/formation des calottes. Lorsqu'elles fondent, elles relâchent du CO_2 gazeux dans l'atmosphère, ce qui augmente la pression de l'air dans l'atmosphère. Et vice versa lors de la reformation des calottes.

60 - L'idée générale est que lorsque la glace de CO_2 se sublime, ceci produit du gaz qui va donc augmenter la pression totale de l'atmosphère. Il faut donc (1) estimer la quantité de matière de $\text{CO}_{2(g)}$ libérée puis (2) voir comment ceci augmente la pression mesurée au sol.

★ (1) Côté calotte de glace :

- Variation du volume de glace entre hiver et été : $\Delta V \simeq \pi(D/2)^2 h$, avec $D = 3000\text{ km}$ le diamètre de la calotte et h inconnu sa hauteur. (On peut évidemment raffiner cette estimation de ΔV , car tout ne fond pas côté sud, etc...)
- Il en résulte une quantité de matière de CO_2 dégagée dans l'atmosphère :

$$\begin{aligned}\Delta n &= \frac{\rho_S \Delta V}{M_{\text{CO}_2}} \\ \Delta n &= \frac{\rho_S \pi D^2 h}{4M_{\text{CO}_2}}.\end{aligned}\tag{4}$$

★ (2) Côté atmosphère :

- $pV_0^2 = n_0 RT_0$ avec $V_0 = 4\pi R_M^2 H$ le volume de l'atmosphère, constant car imposé par la compétition gravité/température. T_0 constant également. (Point discutable ici, car en réalité la pression varie avec l'altitude, et celle mesurée est en $z = 0$, et on n'a donc pas a priori $pV = nRT$... On suppose en fait pour l'utiliser que p est uniforme.)
- Donc la variation de pression est liée à la variation de quantité de gaz dans l'atmosphère par

$$\Delta p V_0 = \Delta n RT_0.\tag{5}$$

★ En mettant 4 et 5 ensembles on a :

$$\Delta p \times 4\pi R_M^2 H = \frac{\rho_S D^2 h}{4M_{\text{CO}_2}} RT_0,\tag{6}$$

d'où on isole h :

$$h = 16 \frac{R_M^2}{D^2} \frac{M_{\text{CO}_2}}{\rho_S} \frac{\Delta p}{RT_0} H\tag{7}$$

Ou encore en utilisant $H = RT_0/(M_{\text{air}}g_0)$:

$$\boxed{h = 16 \frac{R_M^2}{D^2} \frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{air}}} \frac{\Delta p}{\rho_0 g_0} = 0.6\text{ m.}}\tag{8}$$

Remarque sur $pV = nRT$:

Si on ne suppose plus p uniforme. On sait que la pression au sol est le résultat du poids de la colonne d'air au dessus, et on a donc

$$p_0 4\pi R_M^2 = \text{masse de l'atmosphère} \times g_0.\tag{9}$$

Or cette masse augmente de $\Delta n M_{\text{CO}_2}$. La nouvelle pression est donc augmentée de Δp donnée par :

$$(p_0 + \Delta p)4\pi R_M^2 = \text{ancienne masse de l'atmosphère} \times g_0 + \Delta n M_{\text{CO}_2} g_0, \quad (10)$$

d'où $\Delta p 4\pi R_M^2 = \Delta n M_{\text{CO}_2} g_0$. Si on multiplie par $H = RT_0/M_{\text{air}}g_0$ des deux côtés, on obtient :

$$\Delta p 4\pi R_M^2 H = \Delta n M_{\text{CO}_2} g_0 \times \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g_0} \quad (11)$$

$$\Delta p 4\pi R_M^2 H = \Delta n RT_0 \frac{M_{\text{CO}_2}}{M_{\text{air}}}, \quad (12)$$

soit comme tout à l'heure mais avec en plus ce rapport des masses molaires (qui vaut 1.016). Avec ceci on a au final

$$\boxed{h = 16 \frac{R_M^2}{D^2} \frac{\Delta p}{\rho_0 g_0}}. \quad (13)$$