De l'équation cinétique de Vlasov aux équations fluides dans un plasma dilué

Mickaël Melzani
mickael.melzani@gmail.com
www.mmelzani.fr

Abstract

Ce document s'intéresse aux équations gouvernant la dynamique d'un plasma dilué et non collisionnel. Il comporte deux parties : la première explique comment partir de l'équation exacte de Klimontovich pour aboutir à l'équation cinétique de Vlasov (moyenne d'ensemble et oubli des collisions coulombiennes), et la seconde partie explique comment partir de l'équation cinétique de Vlasov pour aboutir aux équations fluides habituelles. On peut directement commencer par la seconde partie si on admet l'équation de Vlasov.

Introduction

On introduit la fonction de distribution f dans l'espace des phases pour les électrons : $f(\vec{x}, \vec{v}, \mathrm{d}t)\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3v$ indique le nombre d'électrons se trouvant dans le volume d^3x autour de $\vec{x}$ et possédant une vitesse $\vec{v}$ à d^3v près, le tout à l'instant t. (On introduit une autre fonction $f_\mathrm{i}(\vec{x}, \vec{v}, \mathrm{d}t)$ pour les ions.)

Il faut dans un premier temps aboutir à une équation portant sur cette fonction. C'est l'objet de la partie 1, qui mène à l'équation de Vlasov sur f.

La partie 2 part ensuite de l'équation de Vlasov pour démontrer les équations fluides de conservation du nombre d'électrons, de la quantité de mouvement, etc.

1 De l'équation de Klimontovich à l'équation de Vlasov

1.1 La fonction de distribution f^K et l'équation de Klimontovich

La situation physique est spécifiée de façon unique par la donnée des positions et des vitesses des N électrons, notons les $\vec{x}_k(t)$ et $\vec{v}_k(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ pour $k = 1..N$, de celles des ions, et par la valeurs des champs électrique et magnétique en tout point de l'espace. On définit la fonction

$$f^K(\vec{x},\vec{v},t) = \sum_{k=1}^{N} \delta(\vec{x}-\vec{x}_k(t))\,\delta(\vec{v}-\vec{v}_k(t)). \tag{1}$$

C'est une fonction nulle presque partout et infinie aux points de l'espace des phases où se trouve un électron. On introduit une fonction similaire pour les ions.

Afin d'obtenir une équation sur f^K, on évalue la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial f^K}{\partial t} = -\sum_k \dot{\vec{x}}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\delta(\vec{x}-\vec{x}_k(t))\,\delta(\vec{v}-\vec{v}_k(t)) - \sum_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\delta(\vec{x}-\vec{x}_k(t))\,\delta(\vec{v}-\vec{v}_k(t)). \tag{2}$$

On utilise ensuite $\dot{\vec{x}}_k = \vec{v}_k$ et $\dot{\vec{v}}_k = \frac{-e}{m}(\vec{E}+\vec{v}_k\wedge\vec{B})$, les champs étant les champs totaux pris au point où se situe la charge k. Quelques manipulations techniques utilisant les propriétés des δ de Dirac et des dérivées mènent ensuite à l'équation de Klimontovitch :

$$\boxed{\frac{\partial f^K}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f^K}{\partial \vec{x}} + \frac{-e}{m}(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\frac{\partial f^K}{\partial \vec{v}} = 0.} \tag{3}$$

On ajoute à cette équation les équations de Maxwell :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = e\dfrac{n_i - n_\mathrm{e}}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{j}_\mathrm{i}+\vec{j}_\mathrm{e}) + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array}\right. \\ \text{avec } n_\mathrm{e}(\vec{x},t) = \displaystyle\int_{\vec{v}} f^K(\vec{x},\vec{v},t)\mathrm{d}^3v = \sum_k \delta(\vec{x}-\vec{x}_k) \\ \text{et}\quad \vec{j}_\mathrm{e} = -e\displaystyle\int_{\vec{v}} \vec{v} f^K(\vec{x},\vec{v},t)\mathrm{d}^3v = \sum_k \vec{v}_k\delta(\vec{x}-\vec{x}_k) \\ \text{et de même pour } n_i \text{ et } \vec{j}_i. \end{array}} \tag{4}$$

Les équations 3 et 4 fournissent une description exacte du plasma, sans perte d'information. La fonction f^K contient en effet les positions et vitesses de chacune des charges, et les champs intervenant dans les équations de Maxwell sont les champs totaux exacts. Il s'agit toutefois d'une description inutilisable en pratique car bien trop lourde (f^K est la somme de plusieurs millions de fonctions de Dirac...), et car les mesures elles-mêmes ne permettent pas d'accéder à ce niveau de détail. On utilise donc une procédure de lissage, pour passer à une description moyennée du plasma. C'est ce qui est fait dans la partie suivante.

1.2 Vers l'équation de Vlasov

On définit

$$\boxed{f(\vec{x},\vec{v},t) = \langle f^K(\vec{x},\vec{v},t)\rangle_\mathrm{ens},} \tag{5}$$

où $\langle\cdot\rangle_\mathrm{ens}$ est une moyenne d'ensemble au sens de la physique statistique, c'est-à-dire une moyenne réalisée sur une infinité de réalisations différentes du plasma qui partent toutes d'un micro-état différent mais compatible avec un même macro-état.

Plus concrètement, f peut être interprétée de la façon suivante : $f(\vec{x},\vec{v},\mathrm{d}t)\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3v$ indique le nombre d'électrons se trouvant dans le volume d^3x autour de $\vec{x}$ et possédant une vitesse $\vec{v}$ à d^3v près, le tout à l'instant t. Le volume mésoscopique d^3x qui intervient dans le processus de moyennage de cette description fluide doit ([7] chap. 3 ou [3] chap. 5) :

- Être assez grand pour contenir un grand nombre de charges afin que les grandeurs moyennées ne fluctuent pas. On impose donc $n\mathrm{d}^3x \gg 1$, soit $\mathrm{d}x \gg n^{-1/3}$.
- Être assez petit pour conserver une information locale. Le critère retenu est $\mathrm{d}x \ll \lambda_D$ avec $\lambda_D = \sqrt{\dfrac{\epsilon_0 k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{n_\mathrm{e}e^2}}$ la longueur de Debye (électronique ici, voir [5] pour sa définition), car si on atteint la longueur de Debye on sait que l'on va avoir des variations significatives de densité (on peut par exemple passer de zones quasi-neutres à des zones avec excès de charges). Ainsi la longueur de Debye sert en fait de longueur macroscopique au-delà de laquelle on sait que les propriétés moyennes varient significativement.

Dans un plasma dilué le paramètre plasma $\Lambda \equiv n\lambda_D^3$ est très grand devant 1, on a donc $n^{-1/3} \ll \lambda_D$, ce qui garantit qu'il existe bien une taille intermédiaire mésoscopique $\mathrm{d}x$ telle que

$$\boxed{n^{-1/3} \ll \mathrm{d}x \ll \lambda_D.} \tag{6}$$

Cette taille est celle sur laquelle sont définies les grandeurs fluides. On remarquera en particulier que le libre parcours moyen n'intervient pas dans sa définition, heureusement car celui-ci est très supérieur à λ_D et même aux longueurs macroscopiques en jeu.

On sépare les champs et f en leur partie moyenne lissée et leur partie fluctuante :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_\text{méso} + \delta\vec{E}, \\ \vec{B} = \vec{B}_\text{méso} + \delta\vec{B}, \\ f^K = f + \delta f, \end{cases}} \tag{7}$$

avec $\vec{E}_\text{méso} = \langle\vec{E}\rangle_\text{ens}$, $\vec{B}_\text{méso} = \langle\vec{B}\rangle_\text{ens}$, et encore $f(\vec{x},\vec{v},t) = \langle f^K(\vec{x},\vec{v},t)\rangle_\text{ens}$.

On prend ensuite la moyenne d'ensemble de l'équation de Klimontovich :

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{\partial f^K}{\partial t} \right\rangle_\text{ens} + \left\langle \vec{v}\cdot\frac{\partial f^K}{\partial \vec{x}} \right\rangle_\text{ens} + \left\langle \frac{-e}{m}(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\frac{\partial f^K}{\partial \vec{v}} \right\rangle_\text{ens} = 0 \\ \Rightarrow \quad &\frac{\partial\langle f^K\rangle_\text{ens}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial\langle f^K\rangle_\text{ens}}{\partial \vec{x}} + \frac{-e}{m}\left\langle (\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\frac{\partial f^K}{\partial \vec{v}} \right\rangle_\text{ens} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

On voit que seul le dernier terme pose problème. On utilise le fait que pour deux quantités quelconques, on a $\langle AB\rangle_\text{ens} = \langle(\langle A\rangle_\text{ens}+\delta A)\rangle_\text{ens}\langle(\langle B\rangle_\text{ens}+\delta B)\rangle_\text{ens} = \langle A\rangle_\text{ens}\times\langle B\rangle_\text{ens} + \langle\delta A\delta B\rangle_\text{ens}$. On obtient donc :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{-e}{m}(\vec{E}_\text{méso}+\vec{v}\wedge\vec{B}_\text{méso})\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -\frac{-e}{m}\left\langle (\delta\vec{E}+\vec{v}\wedge\delta\vec{B})\cdot\frac{\partial \delta f}{\partial \vec{v}} \right\rangle_\text{ens}.} \tag{9}$$

On prend également la moyenne d'ensemble des équations de Maxwell :

$$\boxed{\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{div}\vec{E}_{\text{méso}} = \dfrac{\langle\rho\rangle_{\text{ens}}}{\varepsilon_0} = e\dfrac{\langle n_i\rangle_{\text{ens}} - \langle n_{\text{e}}\rangle_{\text{ens}}}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div}\vec{B}_{\text{méso}} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_{\text{méso}} = -\dfrac{\partial\vec{B}_{\text{méso}}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_{\text{méso}} = \mu_0\langle\vec{j}\rangle_{\text{ens}} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}_{\text{méso}}}{\partial t} = \mu_0(\langle\vec{j}_{\text{i}}\rangle_{\text{ens}} + \langle\vec{j}_{\text{e}}\rangle_{\text{ens}}) + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}_{\text{méso}}}{\partial t}\end{cases} \\ \text{avec } \langle n_{\text{e}}(\vec{x},t)\rangle_{\text{ens}} = \displaystyle\int_{\vec{v}}\langle f^K\rangle_{\text{ens}}\mathrm{d}^3v = \int_{\vec{v}} f\mathrm{d}^3v \\ \text{et}\quad \langle\vec{j}_{\text{e}}\rangle_{\text{ens}} = -e\displaystyle\int_{\vec{v}}\vec{v}\langle f^K\rangle_{\text{ens}}\mathrm{d}^3v = -e\int_{\vec{v}}\vec{v}f\mathrm{d}^3v \\ \text{et de même pour } \langle n_i\rangle_{\text{ens}} \text{ et } \langle\vec{j}_i\rangle_{\text{ens}}.\end{array}} \tag{10}$$

Dans l'équation 9, le terme à droite de l'égalité contient toute l'information sur les variations abruptes des champs et des trajectoires des charges, i.e. sur les collisions ou sur les corrélations entre petit nombre de charges. Au contraire les termes à gauche de l'égalité concernent des quantités lissées, qui traduisent des interactions à longue portée, collectives entre grand nombre de charges. Il existe des procédures techniques pour aboutir à une expression simplifiée du terme de droite, donc à une expression de l'opérateur de collision (opérateur de collisions de Boltzmann pour un gaz, de Landau, de Fokker-Planck ou de Balescu pour un plasma...). Ceci permet ensuite une utilisation telle quelle, ou encore si l'on passe à des équations fluides bilans comme dans la partie suivante d'aboutir à une expression du tenseur de viscosité et à une expression des coefficients de viscosité qui interviennent (voir par exemple [4] chap. 3 pour un résumé de l'approche de fermeture de Braginskii d'un plasma avec collisions).

On peut également, si on souhaite négliger tout effet des collisions, ne pas se soucier de l'expression de l'opérateur de collision et le négliger. Ceci est généralement possible si le paramètre plasma Λ est très supérieur à l'unité (ce qui permet de négliger les fluctuations dans le plasma, puis en général les collisions, mais pour ce dernier point il faut voir en fonction du phénomène étudié et de son échelle de temps). On arrive alors à l'équation cinétique dite de Vlasov :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{x}} + \frac{-e}{m}(\vec{E}_{\text{méso}} + \vec{v}\wedge\vec{B}_{\text{méso}})\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{v}} = 0.} \tag{11}$$

Cette équation peut être utilisée ainsi (associée aux équations de Maxwell) afin d'étudier la dynamique du plasma. Il s'agit d'une équation cinétique, qui fournit une description beaucoup plus précise que les équations fluides car elle porte sur la fonction de distribution f. Elle capture ainsi des effets cinétiques comme l'amortissement de Landau ou des instabilités non collisionnelles qui ne peuvent pas être étudiés autrement.

1.3 Remarques

- La procédure utilisée ici est l'approche de Klimontovich ([4] chap. 3 ou [1] chap. 2). Il existe une autre approche, équivalente, qui part de l'équation de Liouville (voir [2] chap. 2).
- On peut justifier rapidement l'équation de Vlasov si on néglige d'emblée toutes collisions : on considère l'espace des phases $\{\vec{x},\vec{v}\}$ et on adopte un point de vue lagrangien sur cet espace : on suit la trajectoire d'une "particule de fluide" dans cet espace, dont la position évolue selon $\vec{x}(t),\vec{v}(t)$. Notons $\vec{x}_0,\vec{v}_0$ sa position et vitesse à un instant t_0. Cette particule de fluide contient $f(\vec{x}_0,\vec{v}_0,t_0)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3v$ particules initialement, et ce nombre reste constant à mesure qu'elle se déplace dans l'espace des phases. On a donc $f(\vec{x}(t),\vec{v}(t),t)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3v$

constant, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}f(\vec{x}(t),\vec{v}(t),t) = 0$. Or $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$ et $\dot{\vec{v}} = \frac{-e}{m}(\vec{E}_{\text{méso}} + \vec{v}\wedge\vec{B}_{\text{méso}})$. On a donc l'équation de Vlasov.

- Notons que la même approche que précédemment peut être prise pour démontrer l'équation de Klimontovich : on suit également un ensemble de particule dans l'espace des phases le long d'une orbite donnée par les équations du mouvement. La différence est que pour l'équation de Klimontovich l'espace des phases est peuplé de particules ponctuelles (les delta de Dirac) soumises aux champs totaux, alors que pour l'équation de Vlasov l'espace des phases doit être vu comme un fluide continu dont la densité au point $\vec{x},\vec{v}$ est donnée par $f(\vec{x},\vec{v},t)$.
- Une autre démonstration de l'équation de Vlasov consiste à faire un bilan sur un volume $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3v$ fixe dans l'espace des phases. Prenons le cas à une dimension : $f(x,v,t)$ seulement. On délimite un carré de coté $\mathrm{d}x\times\mathrm{d}v$, et on compte les particules entrantes et sortantes entre t et $t+\mathrm{d}t$:
  - coté gauche il entre $f(x,v,t)\times v\mathrm{d}v$ (le flux horizontal est fv),
  - coté droite il sort $f(x+\mathrm{d}x,v,t)\times v\mathrm{d}v$,
  - en bas il entre $f(x,v,t)\times a\mathrm{d}v$ (le flux vertical est fa avec a l'accélération),
  - en bas il sort $f(x,v+\mathrm{d}v,t)\times a\mathrm{d}v$.

  On utilise le fait que a est donné par l'action des champs moyens. Au total on aboutit à l'équation de Vlasov sous la forme

  $$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot(\vec{v}f) + \frac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot\left[\frac{-e}{m}(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})f\right] = 0, \tag{12}$$

  qui est bien équivalente à celle écrite plus haut (voir dans la suite).
- On peut là aussi faire la même démonstration pour l'équation de Klimontovich, avec les mêmes remarques que précédemment concernant la nature de l'espace des phases dans les deux cas.

2 De l'équation de Vlasov aux équations fluides bilan

Cette partie a pour point de départ l'équation cinétique de Vlasov suivie par $f(\vec{x},\vec{v},t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{x}} + \frac{-e}{m}(\vec{E}_{\text{méso}} + \vec{v}\wedge\vec{B}_{\text{méso}})\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{v}} = 0. \tag{13}$$

supplémentée par les quatre équations de Maxwell.

Pour alléger les notations nous omettons les indices $_{\text{méso}}$ ou les crochets $\langle\cdot\rangle_{\text{ens}}$, mais dans toute cette partie 2 les grandeurs $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$, n sont bien des grandeurs lissées, obtenues à partir des grandeurs totales par une moyenne d'ensemble (ou sur un volume d^3x) comme expliqué §1.2. f est elle-même une grandeur lissée (à partir de f^K).

Si on veut parvenir aux équations fluides bilan usuelles (conservation du nombre de charges, de la quantité de mouvement...) il suffit de prendre des moments de l'équation de Vlasov : une intégration de l'équation 13 selon $\int\mathrm{d}^3v$ donne l'équation de conservation du nombre d'électrons, une intégration selon $\int\mathrm{d}^3v\,\vec{v}$ donne l'équation de conservation de la quantité de mouvement, celle selon $\int\mathrm{d}^3v\,mv^2/2$ la conservation de l'énergie, etc. C'est ce que nous faisons dans la suite. On pourra aussi consulter [1, chap. 2], ou [4, chap. 3].

2.1 Définitions

On définit les grandeurs fluides suivantes :

- Densité numérique (nombre de particules par unité de volume) :

$$n(\vec{x},t) = \int_{\vec{v}} f(\vec{x},\vec{v},\mathrm{d}t)\mathrm{d}^3v, \tag{14}$$

- La vitesse moyenne, ou vitesse fluide ou mésoscopique, que l'on peut noter $\vec{v}_{\text{méso}}$ ou encore ici $\vec{u}$ pour abréger :

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \frac{1}{n(\vec{x},t)} \int_{\vec{v}} \vec{v}\, f(\vec{x},\vec{v},\mathrm{d}t)\mathrm{d}^3v. \tag{15}$$

  Dans la suite on utilise le symbole $\langle\cdot\rangle_f$ pour noter une moyenne sur $\vec{v}$ pondérée par f. Par exemple on a $\vec{u} = \langle\vec{v}\rangle_f$.

- Le tenseur qui traduit le transport de quantité de mouvement est :

$$\pi_{k,j}(\vec{x},t) = \int_{\vec{v}} mv_kv_jf(\vec{x},\vec{v},\mathrm{d}t)\mathrm{d}^3v = nm\langle v_kv_j\rangle_f, \tag{16}$$

  avec $k,j = x,y$ ou z. On définit ensuite la partie fluctuante de la vitesse en un point donné : $\delta\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{v} - \vec{u}(\vec{x},t)$. On a donc $\langle\delta\vec{v}\rangle_f = \langle\vec{v}\rangle_f - \vec{u} = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$. Ainsi on a

$$\langle v_kv_j\rangle_f = \langle(\delta v_k + u_k)(\delta v_j + u_j)\rangle_f = \langle\delta v_k\delta v_j\rangle_f + u_ku_j, \tag{17}$$

  et π se réécrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_{k,j}(\vec{x},t) &= nmu_ku_j + p_{k,j} \\ \text{avec}\quad p_{k,j} &= nm\langle\delta v_k\delta v_j\rangle_f, \end{aligned}} \tag{18}$$

  où $p_{k,j}$ est le tenseur de pression.

2.2 Intermède sur les tenseurs

Le tenseur de pression est un tenseur (évidemment), qui possède donc 9 composantes. On note un tenseur avec une double flèche : $\vec{\vec{p}}$, et ses composantes comme $p_{k,j}$ avec k,j représentant chacun x, y ou z.

On considère uniquement des tenseurs symétriques. C'est par exemple le cas pour celui de pression car $p_{k,j} = mn\langle\delta v_k\delta v_j\rangle_f = p_{j,k}$ de façon évidente.

On utilise aussi la notation $\vec{u}\vec{u}$ pour désigner le tenseur dont la composante (k,j) est u_ku_j. Par exemple on a $\vec{\vec{p}} = mn\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f$, où encore $\vec{\vec{\pi}} = mn\vec{u}\vec{u} + mn\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f$.

La divergence d'un tenseur est notée $\dfrac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot\vec{\vec{p}}$. La divergence d'un tenseur est un vecteur. Sa composante selon k est définie comme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot\vec{\vec{p}}\right)_k = \frac{\partial}{\partial x_j}p_{k,j}, \tag{19}$$

avec sommation implicite sur l'indice répété (donc somme sur j ici). La divergence peut également se prendre par rapport à la vitesse, on la note alors $\dfrac{\partial}{\partial\vec{v}}\cdot$.

On a par ailleurs le théorème de Green-Ostrogradski pour un tenseur, avec $\vec{n}$ vecteur unitaire sortant du volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j}p_{k,j}\mathrm{d}^3x = \oiint_{\partial\mathcal{V}} p_{k,j}n_j\mathrm{d}^2S. \tag{20}$$

Enfin, on utilise la même notation pour la divergence d'un vecteur, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{u}$ est la divergence de $\vec{u}$ par rapport à $\vec{x}$, $\dfrac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{u}$ est celle par rapport à $\vec{v}$ (elle est d'ailleurs nulle pour $\vec{u}$ qui ne dépend pas de $\vec{v}$). On note aussi $\dfrac{\partial}{\partial \vec{x}} p$ le gradient du scalaire p.

2.3 Équation de Vlasov

En l'absence de collisions ou corrélations, la fonction de distribution suit l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{-e}{m}(\vec{E}_{\text{méso}} + \vec{v} \wedge \vec{B}_{\text{méso}}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0. \tag{21}$$

On note, dans toute la suite, $\vec{E}_{\text{méso}}$ par $\vec{E}$ et $\vec{B}_{\text{méso}}$ par $\vec{B}$.

$\vec{v}$ et $\vec{x}$ sont des variables indépendantes, donc on a $\vec{v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{v} f)$. On montre également que la divergence par rapport à $\vec{v}$ de $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est nulle, si bien que $\dfrac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \dfrac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\dfrac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right]$. L'équation de Vlasov s'écrit donc aussi sous la forme suivante, que l'on utilisera dans la suite :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{v} f) + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\frac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right] = 0. \tag{22}$$

2.4 Moments de l'équation de Vlasov

Premier moment, conservation du nombre de particules

Le premier moment de l'équation de Vlasov s'écrit :

$$\int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{v} f) + \int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\frac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right] = 0. \tag{23}$$

Le dernier terme est nul par le théorème de la divergence car il s'agit de l'intégrale sur $\vec{v}$ d'une divergence par rapport à $\vec{v}$ et car f tend vers 0 assez rapidement pour $\|\vec{v}\| \to +\infty$. Pour les deux premiers termes on peut permuter les dérivées partielles et l'intégrale pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vec{v}} f \mathrm{d}^3 v + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \int_{\vec{v}} \vec{v} f \mathrm{d}^3 v = 0. \tag{24}$$

Vues les définitions ci-dessus, on a en fait montré que

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot n \vec{u} = 0,} \tag{25}$$

c'est-à-dire l'équation de conservation du nombre d'électrons.

Second moment, conservation de la quantité de mouvement

Pour aboutir à l'équation de conservation de la quantité de mouvement on prend le second moment :

$$\int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v\, \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v\, \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{v} f) + \int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v\, \vec{v} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\frac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right] = 0. \tag{26}$$

Pour le premier terme :

$$\int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3 v\, \vec{v} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\vec{v}} \vec{v} f \mathrm{d}^3 v = \frac{\partial}{\partial t} n \vec{u}. \tag{27}$$

Pour le second terme :

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3v\, \vec{v}\, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{v} f) &= \int_{\vec{v}} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v}\vec{v} f \mathrm{d}^3 v \\
&= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \int_{\vec{v}} \vec{v}\,\vec{v} f \mathrm{d}^3 v \\
&= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot n\langle \vec{v}\vec{v}\rangle_f \\
&= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot n\vec{u}\vec{u} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot n\langle \delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f \\
&= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot n\vec{u}\vec{u} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\vec{\vec{p}}}{m}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Pour le troisième terme on utilise une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3v\, \vec{v}\, \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\frac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right] &= -\int_{\vec{v}} \left[\frac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right] \mathrm{d}^3 v \\
&= -\frac{-e}{m}\left[n\vec{E} + n\vec{u} \wedge \vec{B}\right].
\end{aligned} \tag{29}$$

On a donc montré que :

$$\frac{\partial}{\partial t} n\vec{u} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot n\vec{u}\vec{u} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\vec{\vec{p}}}{m} + \frac{-e}{m}\left[n\vec{E} + n\vec{u} \wedge \vec{B}\right], \tag{30}$$

soit en multipliant par la masse :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} mn\vec{u} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot mn\vec{u}\vec{u} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\vec{p}} - en\left[\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}\right].} \tag{31}$$

Il s'agit de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, écrite ici sous forme conservative. On peut faire quelques manipulations, la composante k du membre de gauche s'écrivant (en oubliant la masse) :

$$\begin{aligned}
n\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(n u_j u_k) &= n\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial n}{\partial t} + u_k \frac{\partial n u_j}{\partial x_j} + n u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\
&= n\frac{\partial u_k}{\partial t} + n u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + u_k \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u_j}{\partial x_j}\right) \\
&= n\frac{\partial u_k}{\partial t} + n\vec{u} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \vec{x}} + u_k \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n\vec{u}}{\partial \vec{x}}\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

En utilisant l'équation 25 de conservation du nombre d'électrons on voit que le terme entre parenthèses est nul. On aboutit ainsi à la forme suivante et habituelle de l'équation 31 :

$$\boxed{mn\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + mn\left(\vec{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)\vec{u} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\vec{p}} - en\left[\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}\right].} \tag{33}$$

Troisième moment, conservation de l'énergie

Nous ne le faisons pas ici, mais il est ensuite possible de prendre le troisième moment pour aboutir à une équation de conservation de l'énergie :

$$\int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3v\, \frac{1}{2}mv^2\, \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3v\, \frac{1}{2}mv^2\, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{v} f) + \int_{\vec{v}} \mathrm{d}^3v\, \frac{1}{2}mv^2\, \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\frac{-e}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) f\right] = 0, \tag{34}$$

etc...

2.5 Retour sur le tenseur de pression

Considérons la distribution des vitesses en un point $\vec{x}$ en nous plaçant dans le référentiel du plasma (qui possède une vitesse $\vec{u}(\vec{x},t)$). Ceci revient formellement à faire le changement de variables $\vec{v} \to \delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$ avec $\vec{u}$ une constante (en un point M donné et t fixé). La distribution des vitesses peut donc s'écrire $f(\delta\vec{v},\vec{x},t)$ et il faut l'intégrer sur $\mathrm{d}^3\delta\vec{v}$.

Supposons cette distribution isotrope, comme par exemple dans le cas de l'équilibre thermodynamique où f est Maxwellienne :

$$f(\delta\vec{v},\vec{x},t) = n(\vec{x},t)\left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m}{2k_\mathrm{B}T}(\delta v_x^2+\delta v_y^2+\delta v_z^2)}. \tag{35}$$

On a alors par exemple :

$$\begin{aligned} n\langle\delta v_x\delta v_y\rangle_f &= \iiint \mathrm{d}\delta v_z\mathrm{d}\delta v_y\mathrm{d}\delta v_x\, \delta v_x\delta v_y f(\delta v_x,\delta v_y,\delta v_z) \\ &= \int \mathrm{d}\delta v_z \int \mathrm{d}\delta v_y\, \delta v_y \int \mathrm{d}\delta v_x\, \delta v_x f(\delta v_x,\delta v_y,\delta v_z) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

car f étant isotrope elle est paire en δv_x. Ainsi si $f(\delta\vec{v})$ est isotrope, alors le tenseur de pression est diagonal dans toute base.

Si en plus chaque élément diagonal est identique, alors le tenseur de pression se met sous la forme

$$\vec{\vec{p}} = p \times \vec{\vec{I}} \tag{37}$$

avec $\vec{\vec{I}}$ la matrice identité. Par exemple dans le cas de la distribution Maxwellienne 35 on calcule que $\vec{\vec{p}} = p \times \vec{\vec{I}}$ avec $p = nk_\mathrm{B}T$.

De plus, si $\vec{\vec{p}} = p \times \vec{\vec{I}}$ on a alors

$$\frac{\partial}{\partial\vec{x}} \cdot \vec{\vec{p}} = \vec{\nabla}p. \tag{38}$$

On retrouve donc le terme habituel en gradient de la pression scalaire. Notons que la forme en $-\vec{\nabla}p$ s'interprète facilement en terme de résultante volumique des forces de pression, ce qui est pertinent pour un fluide, alors que la forme en $-\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot\vec{\vec{p}} = -\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot mn\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f$ s'interprète facilement en terme de transport de quantité de mouvement microscopique, ce qui est pertinent pour un plasma ou un gaz.

2.6 Interprétation des équations fluides comme un bilan sur un volume mésoscopique fixe

Nous reprenons ici en partie ce qui est fait dans l'annexe 2 de [6] et qui montre qu'on peut simplement démontrer les équations fluides en effectuant des bilans sur un volume mésoscopique fixe dans l'espace.

On considère donc un volume V fixe dans l'espace, délimité par une surface S de normale sortante $\vec{n}$.

Équation de conservation du nombre de particules :

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot n\vec{u} = 0. \tag{39}$$

En intégrant sur V et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \mathrm{d}V\, n = -\iiint_V \mathrm{d}V\, \vec{\nabla}\cdot(n\,\vec{v}) = -\oiint_S n\,\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right). \tag{40}$$

L'interprétation est alors claire : le terme de gauche traduit la variation du nombre de particules dans le volume V, et cette variation est causée par le flux de particules à travers la surface S (le terme tout à droite).

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}mn\vec{u} = -\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot mn\vec{u}\vec{u} - \frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot mn\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f - en\left[\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B}\right]. \tag{41}$$

On peut intégrer cette équation sur le volume V fixe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \mathrm{d}V\, n\vec{u} = -\iiint_V \mathrm{d}V\,\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot mn\vec{u}\vec{u} - \iiint_V \mathrm{d}V\,\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\cdot mn\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f + \iiint_V \mathrm{d}V\,(-e)n\left[\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B}\right]. \tag{42}$$

soit pour la composante k et après utilisation du théorème de la divergence dans le cas d'un tenseur :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \mathrm{d}V\, n\,u_k = -\oiint_S mnu_k\,(\vec{u}\cdot\mathrm{d}\vec{S}) - \oiint_S mn\Big\langle\delta v_k\,(\delta\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S})\Big\rangle_f + \iiint_V \mathrm{d}V\,(-e)n\left[\vec{E}+\vec{u}\wedge\vec{B}\right]. \tag{43}$$

L'interprétation des différents termes est alors évidente. Le membre de gauche est égal à la variation de quantité de mouvement dans le volume fixe, et celle-ci varie à cause de chacun des termes du membre de droite :

- ▶ Le premier terme à droite correspond à la composante k de la quantité de mouvement macroscopique (terme mnu_k) apportée dans le volume, à travers sa surface, par le mouvement macroscopique du fluide (vitesse $\vec{u}$).
- ▶ Le second terme est tout à fait similaire dans sa forme. Il s'agit donc de la composante k de la quantité de mouvement microscopique (terme $mn\delta v_k$) apportée dans le volume, à travers sa surface, par le mouvement microscopique du fluide (vitesse δv_j).
- ▶ Le troisième terme traduit l'action de la force de Lorentz qui agit sur chacune des particules du volume V et qui modifie ainsi la quantité de mouvement totale contenue dans V.

Ceci permet de revenir encore sur l'interprétation de la pression et du tenseur associé. On voit dans ce bilan sur le volume fixe que le tenseur $\vec{\vec{\pi}} = mn\vec{u}\vec{u} + mn\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f$ rend compte du flux de quantité de mouvement entrant dans le volume. Sa composante k,j représente le flux de quantité de mouvement orientée selon k passant par une surface de normale j. Ce flux comprend deux contributions : la contribution mésoscopique $\vec{u}\vec{u}$, qui donne le terme en divergence de $\vec{u}\vec{u}$ ou de façon équivalente en $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}$; et la contribution microscopique $\langle\delta\vec{v}\delta\vec{v}\rangle_f$ qui donne le terme en divergence de $\vec{\vec{p}}$ ou, si on le sépare en composante diagonale et non diagonale, le terme en $-\vec{\nabla}p$ et terme de viscosité.

On voit donc clairement que le terme de pression est d'abord d'origine purement cinématique : il rend compte de l'apport de quantité de mouvement par le mouvement microscopique des particules qui entrent et sortent d'un volume fixe. Dans un plasma dilué, il n'a aucun rapport avec de quelconques collisions ou avec une force exercée sur les surfaces entourant le volume.

2.7 Information perdue lors du passage aux équations fluides

Il faut d'abord dire que l'équation de Vlasov est une équation fluide : elle porte sur la fonction de distribution f, qui est une fonction lissée sur un volume mésoscopique de l'espace des phases $\{(\vec{x},\vec{v})\}$. Lorsqu'on effectue ce lissage, et qu'on choisit de mettre à zéro le terme de collision comme fait plus haut, il y a une première perte d'information sur les collisions et corrélations entre charges. C'est ce qui est discuté dans la partie 1 lors du passage de l'équation de Klimontovich portant sur f^K à celle de Vlasov portant sur f. On perd également le terme de collision lors de ce passage.

On a ensuite pris les moments successifs de l'équation de Vlasov, et donc de f : le premier donne la densité de charges n, le second la vitesse moyenne $\vec{u}$, le troisième le tenseur de pression $\vec{\vec{p}}$, etc... et les équations bilan obtenues portent sur la conservation du nombre de particules, de la quantité de mouvement, de l'énergie, etc. La donnée de f et de l'équation de Vlasov est en fait équivalente à la donnée de tous les moments de f et des équations correspondantes. Seulement ceci implique une infinité de quantités et d'équations, ce qui n'est pas vraiment pratique ! En pratique on considère donc uniquement les deux ou trois premières équations, et même typiquement celle de conservation de particules et celle de la conservation de la quantité de mouvement.

Est-il alors possible, en effectuant cette troncature, d'obtenir un jeu d'équations fermées ? La réponse est non : dans chaque équation bilan intervient le moment d'ordre supérieure. Dans l'équation de conservation de la charge intervient le moment d'ordre 1 ($\vec{u}$), dans celle de la conservation de la quantité de mouvement intervient le moment d'ordre 2 ($\vec{\vec{p}}$), dans celle de conservation de l'énergie intervient le moment d'ordre 3 (qui correspond au transfert d'énergie thermique), etc...

Il s'agit du problème de la fermeture. Ainsi si on choisit de garder les deux premières équations, il faut faire des hypothèses sur le tenseur de pression $\vec{\vec{p}}$. C'est à partir de là que la perte d'information commence. Si on n'effectue pas d'hypothèse sur $\vec{\vec{p}}$, les équations restent exactes (dans l'hypothèse de la validité de celle de Vlasov), mais on ne peut rien faire de plus. On peut donc supposer un tenseur d'une forme particulière : $p\vec{\vec{I}}$, ou diagonal mais anisotrope s'il y a présence d'un champ magnétique ambiant, garder des termes non diagonaux pour rendre compte d'une viscosité effective (présente en l'absence de collisions via des effets non linéaires ou d'instabilité), etc...

Notons bien l'étendue de la perte d'information : si on prend un tenseur de pression de la forme $p\vec{\vec{I}}$ avec une loi du type $p = nk_{\mathrm{B}}T$, on ne connaît de f que son moment d'ordre 2, codé dans la température qui donne une idée de l'écart type en vitesse de la distribution. Rien de plus.

Références

[1] P. M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics.* January 2006.

[2] G. Belmont, R. Grappin, F. Mottez, F. Pantellini, and G. Pelletier. *Collisionless Plasmas in Astrophysics.* 2014.

[3] J.D. Callen. *Fundamentals of Plasma Physics.* 2006. URL `http://homepages.cae.wisc.edu/~callen/book.html`.

[4] R. Fitzpatrick. *The Physics of Plasmas.* 2011. URL `http://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/plasma.html`.

[5] M. Melzani. Une courte introduction à la physique des plasmas dilués. *Bull. Un. Phys.*, 992 : 329–342, March 2017.

[6] M. Melzani. Ondes dans un plasma dilué non magnétisé. *Bull. Un. Phys.*, 993 :425–441, April 2017.

[7] D. R. Nicholson. *Introduction to Plasma Theory.* 1983.