

# Régime sinusoïdal forcé

## I Introduction

### 1 - Qu'est ce que le régime sinusoïdal forcé ?

Forçage harmonique  
 $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \rightarrow \boxed{\phantom{\text{Système linéaire invariant}}} \rightarrow s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$   
 système linéaire invariant  
 Intérêt : tout signal est somme de signaux harmoniques

### 2 - Passage régime transitoire $\rightarrow$ RSF

$x_H(t) + x_p(t) \rightarrow x_p(t)$   
 nulle après qq  $\mathcal{T}$

## II Représentation complexe d'un signal

### 1 - Définitions

$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$   
 amplitude complexe  $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$

### 2 - Propriétés

- Somme des amplitudes complexes
- Dérivation  $\times j\omega$
- Intégration  $\times 1/j\omega$

## III Circuits électriques en RSF

### 1 - Impédances complexes $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i} = \underline{U}_0/\underline{I}_0$

- module, argument, déphasage de u et i
- cas de R, L et C
- limites basses et hautes fréquences
- associations // ou série

+

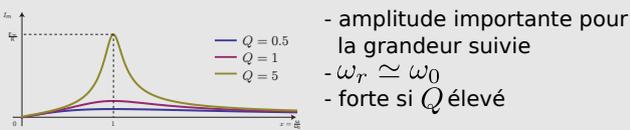
### 2 - Lois de Kirchhoff $\rightarrow$ valables en complexes

### 3 - Exemple

- circuit RL

## IV Étude de la résonance d'un oscillateur forcé

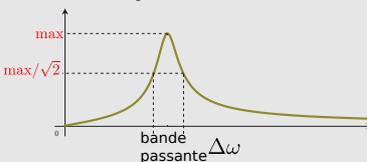
### 1 - Le phénomène de résonance



### 2 - Exemples en électronique et mécanique

- circuit RLC série forcé :  $i(t)$  ou  $u_C(t)$
  - masse-ressort forcé :  $v(t)$  ou  $x(t)$
- $\rightarrow$  cf exercices

### 3 - Bande passante et acuité



### 4 - Étude détaillée : RLC série, intensité

## Ce qu'il faut connaître

\_\_\_\_\_ (cours : I)

- <sub>1</sub> Si un système linéaire invariant reçoit en entrée une grandeur du type  $e_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , quelle est la forme de la grandeur de sortie ?

\_\_\_\_\_ (cours : II)

- <sub>2</sub> Pour un signal complexe harmonique  $\underline{x}(t)$  de pulsation  $\omega$ , comment s'écrit  $\dot{\underline{x}}$  en fonction de  $\underline{x}$  ? Même question pour  $\ddot{\underline{x}}$  ? Même question pour une primitive de  $\underline{x}(t)$  ?

\_\_\_\_\_ (cours : III)

- <sub>3</sub> Comment est définie l'impédance complexe d'un dipôle (en fonction de  $\underline{u}$  et  $\underline{i}$ ) ?

- <sub>4</sub> Quelle est l'expression de l'impédance complexe d'une résistance ? d'un condensateur ? d'une bobine ? (il faut aussi savoir le redémontrer en partant des lois en notation réelle)

- <sub>5</sub> À quoi est équivalent un condensateur à basse fréquence et à haute fréquence ? Même question pour une bobine.

\_\_\_\_\_ (cours : IV)

- <sub>6</sub> Comment décrire rapidement ce qu'est un phénomène de résonance ?

## Ce qu'il faut savoir faire

\_\_\_\_\_ (cours : I)

- <sub>7</sub> Repérer le régime transitoire et le régime permanent (sinusoïdal forcé) sur un relevé temporel.  $\rightarrow$  figure page 5

\_\_\_\_\_ (cours : II)

- ▶<sub>8</sub> Associer à un signal réel harmonique  $x(t)$  son signal complexe  $\underline{x}(t)$ . Faire apparaître l'amplitude complexe. Savoir en déduire l'amplitude et la phase à l'origine. → EC1  
 \_\_\_\_\_ (cours : III)
- ▶<sub>9</sub> Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente. → EC2
- ▶<sub>10</sub> Utiliser le formalisme complexe pour l'étude d'un circuit en RSF :
  - Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence. → EC3
  - Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple. → EC4
  - Obtenir la solution réelle à partir de la solution complexe. → EC4
  - Cf aussi IV du cours.
- ▶<sub>11</sub> Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes. → EC5  
 \_\_\_\_\_ (cours : IV)
- ▶<sub>12</sub> Utiliser le formalisme complexe pour l'étude d'un circuit en RSF et identifier une résonance → EC6
  - Exemples à savoir traiter : résonance en intensité du circuit RLC série (EC6 et TD II), résonance en tension du circuit RLC série (TD III)
- ▶<sub>13</sub> Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité  $Q$ . → TD
- ▶<sub>14</sub> Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux. → TD, TP

## Exercices de cours

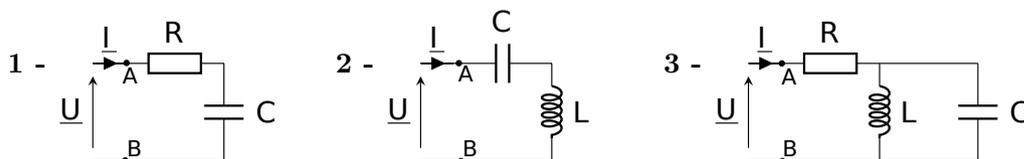
---

### Exercice C1 – Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$ et vice-versa

- 1 - Donner le signal complexe associé à chacun des signaux suivants (où à chaque fois  $u_0 > 0$ ), et donner l'expression de l'amplitude complexe : (a)  $u(t) = u_0 \cos(\omega t - \pi/4)$ , (b)  $u(t) = -u_0 \cos(\omega t)$ , (c)  $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ ,
- 2 - Dans le cas (b), que vaut la phase à l'origine et l'amplitude du signal ?
- 3 - Dans l'autre sens maintenant : on considère les amplitudes complexes suivantes, donner à chaque fois l'expression du signal réel associé. (a)  $\underline{U}_0 = u_0 e^{j\pi/3}$ , (b)  $\underline{U}_0 = u_0 j e^{j\pi/4}$ , (c)  $\underline{U}_0 = -u_0 e^{j\pi/4}$ .

### Exercice C2 – Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente

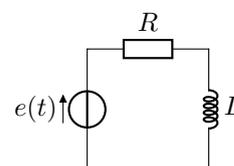
Donner l'expression de l'impédance équivalente à chaque association de dipôles.



### Exercice C3 – Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence

On considère le circuit ci-contre. On se place en RSF :  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

- 1 - Déterminer la valeur du courant  $i(t)$  dans le circuit lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , et lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ .



### Exercice C4 – Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple.

On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

- 1 - Quel est le signal complexe associé à  $e(t)$  ? Comment s'exprime son amplitude complexe ?
- 2 - On cherche  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Comment s'écrit la grandeur complexe associée ? Et l'amplitude complexe ?
- 3 - En étudiant le circuit, trouver l'expression de l'amplitude complexe de  $i(t)$  en fonction de  $E_0$ ,  $R$ ,  $L$ , et  $\omega$ .
- 4 - Soit l'amplitude complexe  $\underline{I}_0 = \frac{E_0}{R + jL\omega}$  trouvée précédemment. Donner l'expression de l'amplitude et de la phase à l'origine du signal réel associé.

Variante : le faire avec un circuit RC série (mêmes questions pour à la fin exprimer  $\underline{I}_0$ ).

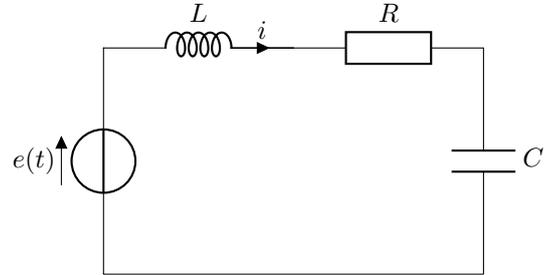
### Exercice C5 – Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes

On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On peut montrer que l'équation différentielle suivie par le courant  $i(t)$  est  $e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri$ .

- 1 - En déduire l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{I}_0$  de  $i(t)$  en fonction de  $E_0$ ,  $R$ ,  $L$ , et  $\omega$ .

### Exercice C6 – Résonance en intensité dans le circuit RLC série

On considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On s'intéresse ici au courant  $i(t)$ .



- 1 - Par une étude asymptotique, donner la valeur du courant pour  $\omega \simeq 0$ , puis pour  $\omega \rightarrow \infty$ .

- 2 - On cherche  $i(t)$  sous la forme  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

- 3 - Donner l'expression de l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit.

- 4 - Donner l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{I}_0$  de  $i$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $E_0$  et  $\omega$ .

Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique  $\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$ , en introduisant la pulsation propre

$\omega_0$ , le facteur de qualité  $Q$ , et la pulsation réduite  $x = \omega/\omega_0$ .

On donnera les expressions de  $\omega_0$  et de  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

- 5 - En déduire l'expression de l'amplitude  $I_0$  du courant en fonction de  $x$ . Tracer l'allure de la courbe  $I_0 = f(x)$ .

Pour quelle pulsation la résonance en intensité a-t-elle lieu ?

## Méthodes et outils

### Relations utiles

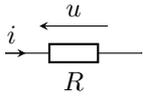
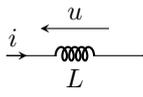
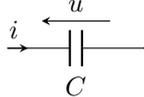
$$e^{j\pi} = -1 \quad e^{j\pi/2} = j \quad (\text{se retrouve avec } e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x) \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

## Récapitulatif sur les dipôles

Propriété	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole normalisé			
Loi de comportement	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$ $q = Cu$
Loi de comportement en représentation complexe	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{U} = jL\omega\underline{I}$	$\underline{U} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$
Impédance complexe $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ en RSF	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
Dipôle équivalent en basses fréquences ( $\omega \sim 0$ )	Résistance $R$	Fil	Interrupteur ouvert
Dipôle équivalent en hautes fréquences ( $\omega \rightarrow +\infty$ )	Résistance $R$	Interrupteur ouvert	Fil
Puissance reçue $P = ui$	$P = Ri^2 = u^2/R$		
Énergie stockée	aucune	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$E = \frac{1}{2}Cu^2$
Grandeur physique nécessairement continue	aucune	$i$	$u$

## Cours

### I – Introduction

#### 1 – Qu'est-ce que le régime sinusoïdal forcé ?

##### a/ Régime sinusoïdal forcé

###### Définition : Régime sinusoïdal forcé (RSF)

Un système est en régime sinusoïdal forcé lorsque son entrée  $e(t)$  est imposée ("forcée"), et du type sinusoïdal :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi_e).$$

Deux exemples : circuit RLC, masse-ressort.

##### b/ Systèmes linéaires invariants

###### Rappel : SLI

Un système linéaire invariant (SLI) est un système dont l'évolution est décrite par des équations différentielles **linéaires** à coefficients **constants**. Son **L'ordre** est donné par l'ordre de l'équation différentielle.

Soit  $e(t)$  un signal d'entrée, et  $s(t)$  le signal de sortie associé. On note ceci :  $e(t) \xrightarrow{\text{sys}} s(t)$ . C'est  $s(t)$  qu'on étudie.

###### Propriétés des SLI

- **Linéarité** : si on a  $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$  et  $e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_2(t)$ , alors on aura aussi :  $e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t) + s_2(t)$ , et on aura pour tout réel  $k$  :  $k e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} k s_1(t)$ .
- **Invariance** : si lors d'une expérience on a  $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$ , alors on aura encore  $e_1(t) \xrightarrow{\text{sys}} s_1(t)$  si l'on vient refaire l'expérience plus tard.

↪<sub>1</sub> Les circuits électroniques composés de résistances, de bobines et de condensateurs sont linéaires. À votre avis, pourquoi ?

↪<sub>2</sub> Quel exemple de composant peut faire qu'un système électronique n'est pas linéaire ?

## c/ Propriété fondamentale

### Propriété des SLI en RSF

Si le signal d'entrée est sinusoïdal alors le signal de sortie l'est également, **avec la même pulsation** :

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \xrightarrow{\text{sys}} s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi_s). \quad (1)$$

⇒ La pulsation de sortie est la même que celle d'entrée. Mais l'amplitude  $s_0$  et la phase à l'origine  $\varphi_s$  sont différentes.

⇒ L'objectif de ce chapitre est d'étudier les outils qui permettent de déterminer  $s_0$  et  $\varphi_s$ .

**Remarque :** Cette propriété provient essentiellement du fait que lorsque l'on dérive ou intègre une fonction cos, on trouve une fonction – sin de même pulsation (donc un cosinus puisque  $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ ), donc on ne change pas de type de fonction par dérivation ou intégration.

## d/ Intérêt de l'étude de la réponse à une excitation harmonique

On décompose le signal d'entrée en somme de signaux harmoniques (cf chapitre 4.0).

Par linéarité on a donc :

$$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \xrightarrow{\text{sys}} s(t) = c'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_n \cos(n\omega_0 t + \varphi'_n). \quad (2)$$

(c'est le cas d'un signal périodique, pour un signal quelconque la somme devient une intégrale)

⇒ Ce chapitre permettra donc de savoir quelles harmoniques sont amplifiées, atténuées, déphasées...

## 2 – Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé

► **Régime permanent :** lorsque la sortie d'un système a atteint une valeur constante, ou lorsque qu'elle a atteint un régime périodique.

Le critère porte sur la sortie  $s(t)$ .

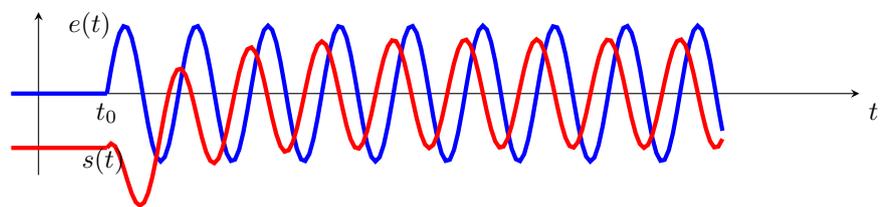
► **Régime transitoire :** lorsque la sortie d'un système évolue, pendant un certain temps, entre deux régimes permanents.

► **Régime forcé :** lorsque l'entrée du système est maintenue à une valeur non nulle. Cette valeur peut être constante, peut être harmonique (on parle alors de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou peut être une fonction périodique (un créneau par exemple).

Le critère porte sur l'entrée  $e(t)$ .

► **Régime libre :** lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie. Donc lorsque l'entrée du système est nulle ou devient nulle :  $e(t) = 0$ .

↪<sub>3</sub> Mettre en évidence les régimes permanent, transitoire, libre ou forcé.



⇒ Mathématiquement :

▷ le régime transitoire correspond à la solution homogène  $s_H(t)$ , qui décroît exponentiellement au bout de quelques  $\tau$  ;

▷ le régime permanent correspond à la solution particulière  $s_p(t)$  qui, en RSF, est du type sinusoïdale.

⇒ Dans ce chapitre, nous supposons que le régime transitoire est terminé et nous étudions uniquement le régime permanent sinusoïdal. Nous ne nous intéressons donc pas aux conditions initiales.

## II – Représentation complexe d'un signal

### 1 – Définitions

#### Représentation complexe

**Notation** : les grandeurs complexes sont soulignées.

#### ★ Module et argument

- ▶ Module de l'amplitude complexe :
  
- ▶ Argument de l'amplitude complexe :

⇒ l'amplitude complexe  $\underline{X}_0$  contient toute l'information sur le signal réel.

#### ★ Lien avec le signal réel

Le signal complexe "n'existe pas", c'est un outil.  
Sa partie réelle redonne  $x(t)$  :

↪<sub>4</sub> Faire l'**EC1**.

### 2 – Propriétés

**Attention** : on étudie des signaux **synchrones**, c'est-à-dire qui ont tous la **même pulsation**  $\omega$ .

#### ▶ Les amplitudes complexes s'ajoutent :

$x_1(t) = X_{10} \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $x_2(t) = X_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$  ont pour amplitudes complexes : .

Alors  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  a pour amplitude complexe :  $\underline{X}_0 = \underline{X}_{10} + \underline{X}_{20} = \dots$

On peut en déduire l'amplitude et la phase à l'origine de  $x(t)$  en calculant  $|\underline{X}_0| = |\underline{X}_{10} + \underline{X}_{20}|$  et  $\arg(\underline{X}_0) = \arg(\underline{X}_{10} + \underline{X}_{20})$ .

#### ▶ Dérivation par rapport au temps : dériver revient à multiplier par $j\omega$ .

#### ▶ Intégration par rapport au temps : intégrer revient à diviser par $j\omega$ .

Exemple : avec la loi de comportement d'une inductance :

### III – Circuits électriques en RSF

#### 1 – Impédance complexe des dipôles

##### a/ Définition et loi d'Ohm généralisée

Soit un dipôle en convention récepteur.

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \xrightarrow[\text{complexe}]{\text{représentation}}$$

**Définition : impédance complexe  $\underline{Z}$  d'un dipôle**

**Propriétés**

On a donc :  $\underline{Z} = \frac{U_0}{I_0} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ .

Ainsi :

- ▶ Le module donne le rapport des amplitudes :
- ▶ L'argument donne le déphasage de  $u(t)$  par rapport à  $i(t)$  :

On a la **loi d'Ohm généralisée**, pour tout dipôle :

Remarque :

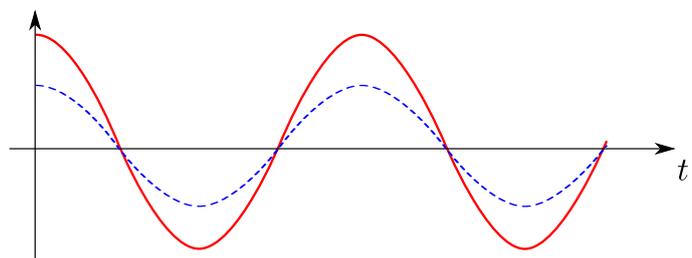
- ▶ On peut décomposer  $\underline{Z} = R + jX$ .
  - La partie réelle  $R$  donne la résistance du dipôle. Positive pour un dipôle passif.
  - La partie imaginaire  $X$  est appelée la réactance.  $X > 0 \Rightarrow$  dipôle inductif;  $X < 0 \Rightarrow$  dipôle capacitif.
- ▶ On définit  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  l'admittance complexe du dipôle. Unité :  $\Omega^{-1}$  ou siemens ( $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$ ).

##### b/ Exemples : résistance, inductance, capacité

###### ★ Résistance

$\rightsquigarrow_5$  Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

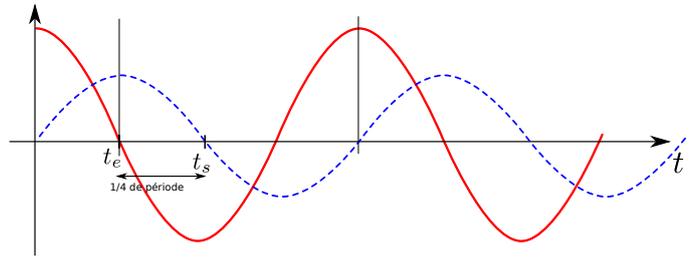
$\rightsquigarrow_6$   $\underline{Z}$  est réel, quelle conséquence sur le déphasage ?



★ Inductance

↪<sub>7</sub> Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

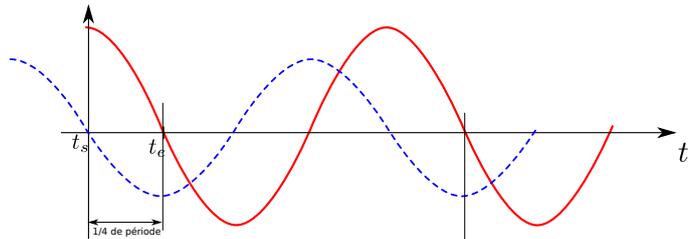
↪<sub>8</sub> Que vaut l'argument de  $\underline{Z}$ ? Qu'en déduire sur le déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$ ? Identifier les courbes ci-contre.



★ Capacité

↪<sub>9</sub> Écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance.

↪<sub>10</sub> Que vaut l'argument de  $\underline{Z}$ ? Qu'en déduire sur le déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$ ? Identifier les courbes ci-contre.



c/ Comportements en basses et hautes fréquences

Hautes fréquences signifie que  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Basses fréquences signifie que  $\omega \rightarrow 0$ . Le régime permanent continu en est un cas particulier, puisqu'alors  $\omega = 0$ .

★ Bobine

↪<sub>11</sub> Écrire l'expression de l'impédance complexe. Prendre la limite lorsque  $\omega \rightarrow 0$  ou  $+\infty$ . En déduire le dipôle équivalent.

► Basses fréquences :

► Hautes fréquences :

★ Condensateur

↪<sub>12</sub> Écrire l'expression de l'impédance complexe. Prendre la limite lorsque  $\omega \rightarrow 0$  ou  $+\infty$ . En déduire le dipôle équivalent.

► Basses fréquences :

- ▶ Hautes fréquences :

## 2 – Lois de Kirchhoff généralisées

### a/ Associations de dipôles linéaires

La loi d'Ohm  $\underline{u} = \underline{Z}i$  fait que les résultats vus pour les associations de résistances se généralisent aux associations d'impédances :

- ▶ Association série :

- ▶ Association parallèle :

Cas particuliers :

- ▶ Des inductances en série s'ajoutent :

- ▶ Des capacités en parallèle s'ajoutent :

↔<sub>13</sub> **EC2**

### b/ Lois générales pour les circuits linéaires en RSF

La loi des mailles et la loi des nœuds sont encore valable en RSF entre les grandeurs complexes, ou entre les amplitudes complexes.

Les relations comme les diviseurs de tension et de courant sont donc aussi valables.

## 3 – Exemple d'étude de circuit

Savoir mener une étude en régime asymptotique ↔<sub>14</sub> **EC3**

Savoir obtenir la solution complexe en utilisant les impédances complexes ↔<sub>15</sub> **EC4**

Autre méthode : obtenir la solution complexe en passant par l'équation différentielle en notations réelles ↔<sub>16</sub> **EC5**

## IV – Étude de la résonance d'un oscillateur forcé

### 1 – Le phénomène de résonance

#### Définition : Résonance

Soit un système dont l'entrée est forcée par un signal harmonique de pulsation  $\omega$ .

Il y a **résonance** si, pour une valeur particulière de  $\omega$  (appelée pulsation de résonance), une des grandeurs du système **oscille avec une amplitude très importante**.

Mathématiquement : résonance  $\Leftrightarrow$  l'amplitude  $U(\omega)$  possède un maximum local (autre qu'en  $\omega = 0$ ).

#### Propriétés

Pour une situation donnée, il faudra distinguer **trois pulsations** :

- ▶ **La pulsation propre** du système,  $\omega_0$ .  
C'est la pulsation à laquelle il oscille s'il est abandonné sans contrainte.  
Par exemple pour le système masse-ressort :  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , ou pour le circuit  $RLC$  :  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .
- ▶ **La pulsation du forçage**,  $\omega$ , à laquelle on force le système à évoluer.
- ▶ L'éventuelle **pulsation de résonance**,  $\omega_r$ , qui correspond à une pulsation de forçage pour laquelle la réponse est forte.

En général, la résonance a lieu lorsque le système est forcé à sa pulsation propre ou presque :  $\omega_r \simeq \omega_0$ .

Elle est d'autant plus forte que le facteur de qualité  $Q$  est grand.

**L'idée physique de la résonance** est que lorsqu'on force le système à sa fréquence propre, l'énergie qu'on lui transmet est toujours apportée en phase, et augmente sans cesse.

**Exemple** : Lorsque l'on fait de la balançoire, on pousse toujours au bon moment pour que l'amplitude des oscillations augmente.

Il y a ensuite des mécanismes qui modèrent cette augmentation : non-linéarités ou phénomènes de dissipation.

Ainsi, une résonance sera d'autant plus forte que le facteur de qualité du système sera grand (peu de dissipation).

**Des exemples de phénomènes de résonance (pas à connaître) :**

- ▶ La caisse de résonance d'un instrument de musique est - comme son nom l'indique - conçue pour que l'amplitude de l'onde sonore soit très importante en sortie.
- ▶ Une montre à quartz exploite les vibrations d'un cristal de quartz à une fréquence bien précise, sa fréquence de résonance, afin d'en compter les oscillations et de tenir le temps.
- ▶ L'amplitude importante des oscillations peut endommager le système, que ce soit une tension électrique trop importante ou des vibrations mécaniques trop importantes. Voiture ou vélo sur une route oscillant régulièrement, marcheurs sur un pont, vibrations provoquées par un séisme : si la fréquence de ces excitations coïncide avec celle de résonance du système, il peut y avoir destruction. Cf vidéo.
- ▶ Les marées sont aussi d'amplitude plus ou moins forte en fonction de résonances entre le forçage (Soleil et Lune, période de  $\simeq 24$  h), et la période propre des oscillations de l'eau au lieu considéré.

### 2 – Exemples en électronique et en mécanique

**Remarque** : rien n'est à connaître par cœur dans ces exemples, mais les avoir déjà rencontrés vous permettra de mieux comprendre les exercices.

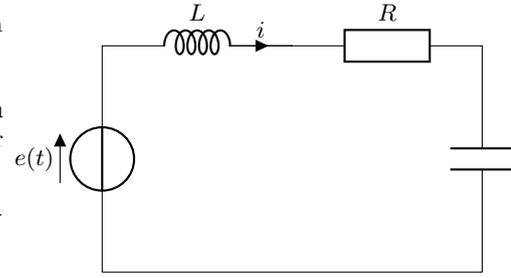
## a/ Électronique : circuit RLC série

On considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

On peut s'intéresser à plusieurs grandeurs : l'intensité  $i(t)$ , la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur, celle aux bornes de la bobine, ou encore à la puissance  $i(t) \times u_C(t)$  reçue par le condensateur.

Certains cas donnent les mêmes équations, et il y a en fait seulement deux types de résonances, que nous présentons ci-dessous.



### a.1/ Résonance en intensité (EC6)

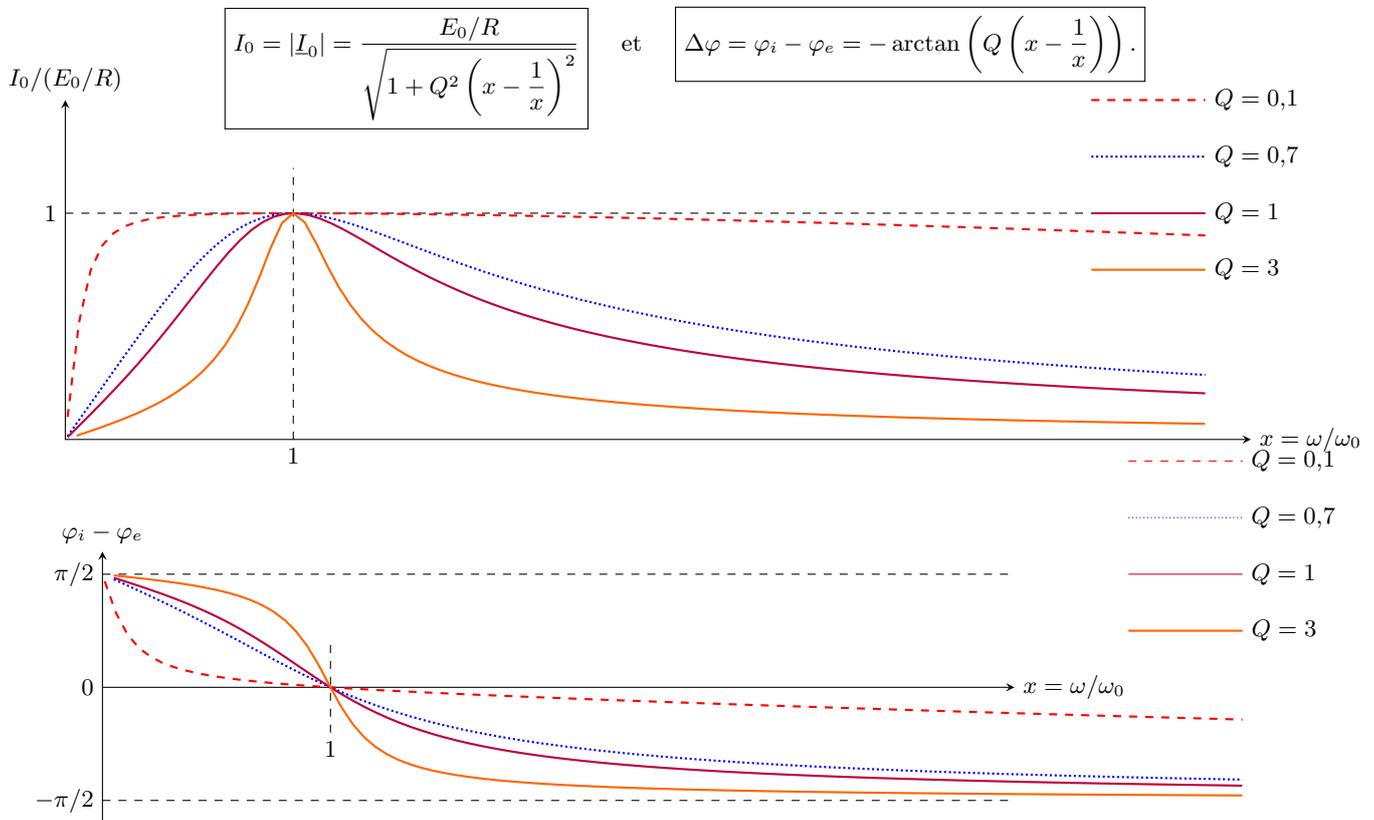
★ La grandeur d'intérêt est ici l'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

~17 Faire l'EC6.

★ **Bilan** : l'amplitude complexe du courant s'écrit sous une forme canonique, avec  $x = \omega/\omega_0$  :

$$\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'amplitude (réelle) et la phase à l'origine du courant sont donc :



La résonance a lieu si  $I_0$  est maximal, donc en  $x = 1$ , donc pour  $\omega = \omega_0$ .

Le déphasage  $\Delta\varphi$  est nul à la résonance :  $i(t)$  et  $e(t)$  sont alors en phase.

### a.2/ Résonance en tension ( $u_C$ ) (TD III)

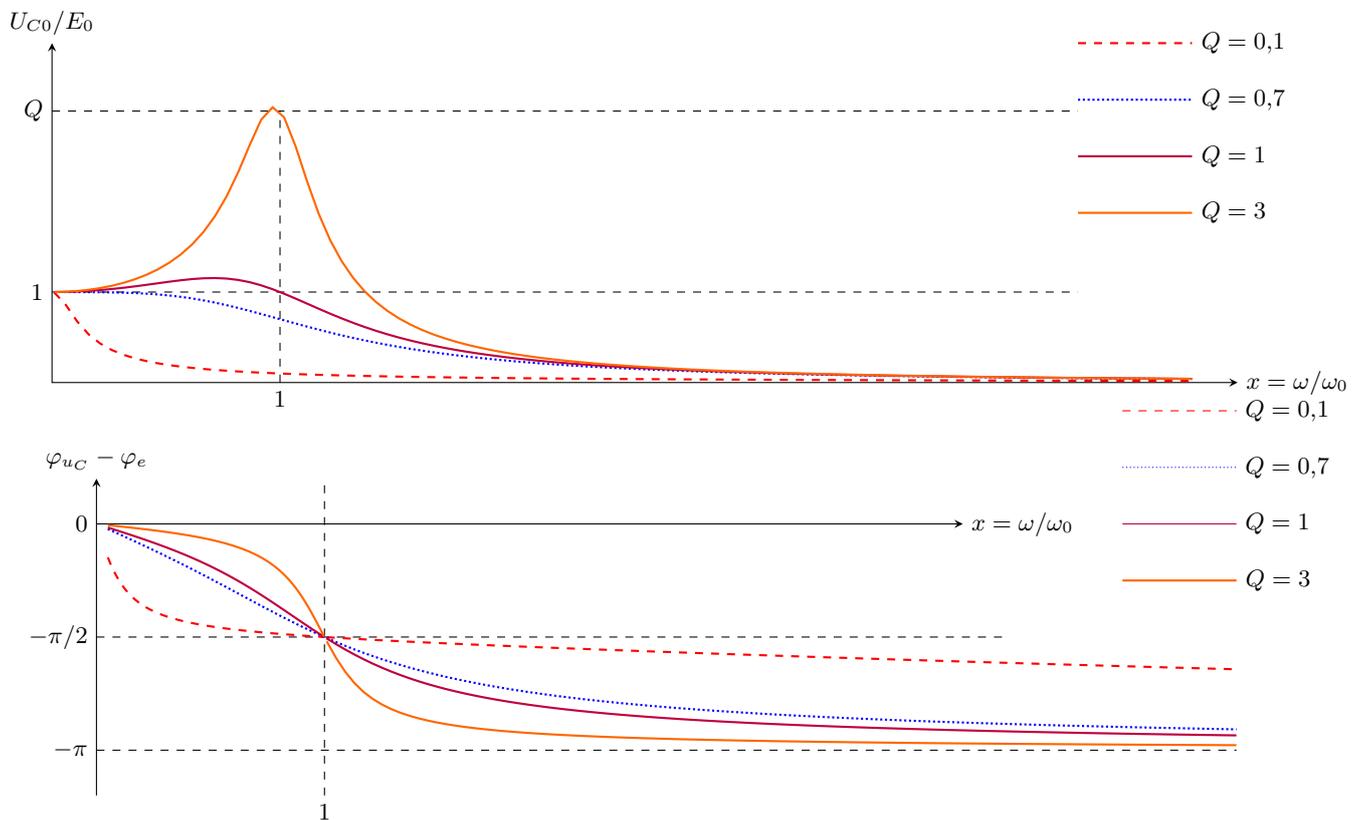
★ La grandeur d'intérêt est ici la tension  $u_C(t) = U_{C0} \cos(\omega t + \varphi)$ .

★ Bilan (cf TD III) : l'amplitude complexe s'écrit sous une forme canonique :

$$\underline{U}_{C0} = \frac{E_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad x = \omega/\omega_0.$$

★ L'amplitude (réelle) et la phase à l'origine de la tension sont donc alors :

$$U_{C0} = |\underline{U}_{C0}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = \varphi_{u_C} - \varphi_e = \arctan \frac{Q(1 - x^2)}{x} - \frac{\pi}{2}.$$



- Il y a résonance si  $U_{C0}(x)$  admet un maximum pour une valeur de  $x \in ]0, +\infty[$ . L'étude montre (cf TD III) que c'est le cas seulement si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$ , en  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .
- À la pulsation propre ( $\omega_0$ ), l'amplitude vaut  $Q$  fois l'amplitude en  $x = 0$ ; et ici  $\omega_r \neq \omega_0$ , mais il y a presque égalité pour  $Q$  élevé.
- Le déphasage  $\Delta\varphi$  vaut  $-\frac{\pi}{2}$  à la pulsation propre  $\omega_0$  :  $u_C(t)$  et  $e(t)$  sont alors en quadrature, avec  $u_C(t)$  en retard sur  $e(t)$ .

### b/ Mécanique : système masse-ressort

Pour le système masse-ressort, l'étude de la vitesse  $v(t) = \dot{y}(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$  mène aux mêmes relations que pour l'étude de l'intensité du circuit RLC série (cas a.1 ci-dessus).

En revanche, l'étude de la position  $x(t)$  mène aux mêmes relations que pour l'étude de la tension du circuit RLC série (cas a.2 ci-dessus).

### 3 – Bande passante et acuité de la résonance

#### Définition : bande passante

La **bande passante** est l'ensemble des pulsations qui ne sont pas trop atténuées.

Les **pulsations de coupures** sont les pulsations qui délimitent la bande passante.

Par convention, ce sont celles pour lesquelles l'amplitude  $U_0$  de la grandeur d'intérêt est égale à l'amplitude maximale divisée par  $\sqrt{2}$  :

$$\omega_c \text{ est telle que } U_0(\omega_c) = \frac{U_{0\max}}{\sqrt{2}}.$$

Il y a en général deux pulsations de coupures,  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$ . La largeur de la bande passante est définie comme  $\Delta\omega = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$ .

→<sub>18</sub> Faire apparaître la bande passante sur la courbe de  $Q$  le plus élevé dans les deux exemples vu plus haut.

#### Définition : acuité d'une résonance

La largeur de la bande passante donne une bonne idée de la largeur de la résonance.

On définit ainsi l'acuité de la résonance comme  $A_c = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ .

Si la résonance est assez forte, on a  $A_c \simeq Q$ .

(cette définition n'est pas à connaître, elle sera rappelée)

Nous verrons en TD que l'étude des tracés d'amplitude et de phase permet de remonter à la pulsation propre et au facteur de qualité du système.