

I Trous noirs

I.1 Caractéristiques usuelles du mouvement dans un champ de gravitation

1 - On applique le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe O :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F\vec{e}_r = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{\sigma}_O = \text{cst.}}$$

2 - On sait que (propriété du produit vectoriel) $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est perpendiculaire à \overrightarrow{OM} .

Donc $\forall t, \overrightarrow{OM} \perp \vec{\sigma}_O$.

Donc $\forall t, \overrightarrow{OM} \perp \vec{e}_z$ (car $\vec{\sigma}_O$ est selon \vec{e}_z).

→ Si \overrightarrow{OM} reste toujours perpendiculaire à \vec{e}_z , c'est que le mouvement du point M est toujours contenu dans le plan Oxy .

3 - Comme d'habitude : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, et $\vec{v} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Ensuite :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \underbrace{r\vec{e}_r}_{\overrightarrow{OM}} \wedge m \underbrace{(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}_{\vec{v}} \\ &= \underbrace{r\vec{e}_r \wedge \dot{r}\vec{e}_r}_{=\vec{0}} + r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, on en déduit que $\boxed{\forall t, r^2\dot{\theta} = \text{cst.}}$ Géométriquement, il s'agit de la loi des aires.

4 - PFD à la masse m : $m\vec{a} = F\vec{e}_r$ avec $\vec{F} = -G\frac{mm_0}{R^2}\vec{e}_r$.

Par dérivations successives, et car R est constant :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

Le PFD sur \vec{e}_θ indique donc que $mR\ddot{\theta} = 0$, donc $\ddot{\theta} = 0$, donc la vitesse angulaire $\boxed{\dot{\theta} = \text{cst.}}$

Ceci implique aussi que $\|\vec{v}\| = R|\dot{\theta}|$ est constante.

5 - Le PFD sur \vec{e}_r indique : $-mR\dot{\theta}^2 = -G\frac{mm_0}{R^2}$.

On a $|\dot{\theta}| = \|\vec{v}\|/R$, donc ceci s'écrit aussi : $m\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = G\frac{mm_0}{R^2}$.

Donc $v = \sqrt{\frac{Gm_0}{R}}$.

6 - $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_0}{R} \underset{v=\sqrt{\frac{Gm_0}{R}}}{=} \frac{1}{2}m\frac{Gm_0}{R} - \frac{Gmm_0}{R}$, d'où

$$E_m = -\frac{Gmm_0}{2R} < 0.$$

Il est normal qu'elle soit négative, puisque nous avons montré que c'est le cas pour les états liés (orbites bornées).

1.2 Modèle classique de trou noir

7 - On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre, et une distance infinie. À distance infinie on a $r \rightarrow \infty$ et, à la limite, elle n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi,

$$\frac{1}{2}m v_{\text{lib}}^2 - \frac{G m_0 m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2G m_0}{R}}$$

8 - Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_S alors sa vitesse de libération est égale à c :

$$R_S = \frac{2G m_0}{c^2}.$$

L'astre est un trou noir si $R < R_S$.

9 -

$$R_{S,S} = 3,0 \text{ km} \quad \text{et} \quad R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de babyfoot ou de ping-pong !

1.3 Trou noir supermassif

10 - On utilise la troisième loi de Kepler pour l'étoile S1 : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{TN}}}$.

On isole la masse du trou noir : $M_{\text{TN}} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11}} \frac{(3300 \times 1,5 \times 10^{11})^3}{(94 \times 365,25 \times 86400)^2} = 8,1 \times 10^{36} \text{ kg}$.

Si on divise par la masse du Soleil, M_S , on obtient $M_{\text{TN}} = 4,1 \times 10^6 M_S$, soit donc 4 millions de masses solaires.

11 - $D = \frac{\lambda}{\sin \theta} \simeq \frac{\lambda}{\theta} \simeq 1,3 \times 10^7 \text{ m}$, soit $D \simeq 13\,000 \text{ km}$.

12 - Les scientifiques n'ont pas construit un télescope de ce diamètre ! Ils ont combiné les signaux reçus de télescopes situés en différents points de la Terre, ce qui revient à disposer d'un télescope dont le diamètre est de l'ordre de celui de la Terre ($2R_T \simeq 12\,800 \text{ km}$).

Illustration du principe : à gauche le miroir complet du télescope de la taille de la Terre, à droite seules certaines portions de ce miroir géant sont exploitées, là où il y a des radiotélescopes.



I.4 Fusion de deux trous noirs

13 - Identique à précédemment, avec une force légèrement différente (facteur $2^2 = 4$ en plus) :

$$m \frac{\|\vec{v}_1\|^2}{R} = G \frac{mm}{(2R)^2}, \quad \text{donc} \quad \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{4R}}}$$

14 - $v_1 = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{2\pi R}{T}$, soit donc en remplaçant :

$$\sqrt{\frac{Gm}{4R}} = \frac{2\pi R}{T}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{16\pi^2 R^3}{Gm}}} \quad \text{et} \quad \boxed{f^2 = \frac{1}{T^2} = \frac{m}{16\pi^2 R^3}}$$

15 - $\boxed{E_p = -\frac{Gm^2}{(2R)}}$ (on vérifie que $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dR} \vec{e}_r$).

16 - $E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gm^2}{(2R)} = 2 \times \frac{1}{2}m \frac{Gm}{4R} - \frac{Gm^2}{(2R)}$, soit $\boxed{E_m = -\frac{Gm^2}{4R}}$.

17 - On utilise $E_m = -\frac{Gm^2}{4R}$ et $f^2 = \frac{Gm}{16\pi^2 R^3}$.

Avec la seconde relation on exprime $R = \left(\frac{Gm}{16\pi^2 f^2}\right)^{1/3}$, et on injecte dans la 1^{re} :

$$E_m = -\frac{Gm^2}{4} \left(\frac{16\pi^2 f^2}{Gm}\right)^{1/3} = -\frac{(16\pi^2)^{1/3} G^{2/3} m^{5/3}}{4} f^{2/3}$$

On peut simplifier un peu :

$$\boxed{E_m = -\alpha f^{2/3} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}}$$

18 - E_m décroît. Or $E_m = -\alpha f^{2/3}$, donc la fréquence f est une fonction croissante du temps (à cause du moins). Ceci se voit bien sur l'enregistrement !

On a aussi $E_m = -\frac{Gm^2}{4R}$, donc R décroît : les trous noirs se rapprochent et finissent par fusionner.

19 - L'idée est d'utiliser $\frac{dE_m}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m^5}{R^5}$ dans lequel on injecte l'expression $E_m = -\alpha f^{2/3}$ pour E_m et $R = \left(\frac{Gm}{16\pi^2 f^2}\right)^{1/3}$ pour R :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\alpha f^{2/3} \right) &= -\frac{2}{5} \frac{G^4}{c^5} m^5 \left(\frac{Gm}{16\pi^2 f^2} \right)^{-5/3} \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \alpha f^{2/3-1} \frac{df}{dt} &= -\frac{2}{5} \frac{G^4}{c^5} m^5 \left(\frac{Gm}{16\pi^2} \right)^{-5/3} f^{10/3} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \alpha \frac{df}{dt} &= \frac{2}{5} \frac{G^4}{c^5} m^5 \left(\frac{Gm}{16\pi^2} \right)^{-5/3} f^{10/3} f^{1/3}. \end{aligned}$$

C'est bien du type $\frac{df}{dt} = K f^{11/3}$.

Remarque : En détaillant les calculs on trouve $K = \frac{384 \times 2^{1/3}}{5} \pi^{8/3} \frac{G^{5/3}}{c^5} m^{5/3}$. C'est en accord par exemple avec l'article <https://arxiv.org/pdf/1602.03837.pdf>. Tout ceci est valable dans l'approximation newtonienne (à la fois pour la formule d'émission des ondes gravitationnelles qui est valable à l'ordre le plus bas, et aussi par toute notre analyse mécanique).

20 - On l'écrit comme $f^{-11/3} \frac{df}{dt} = K$ et on primitive une fois : $\frac{f^{-11/3+1}}{-11/3+1} = Kt + A$ avec A une constante d'intégration.

Donc $f^{-8/3} = -\frac{8}{3}Kt + B$ avec B une constante. On trouve B grace à $f(t=0) = f_0$: $B = f_0^{-8/3}$.

Donc $f^{-8/3} = f_0^{-8/3} - \frac{8}{3}Kt$, d'où $f(t) = \left(f_0^{-8/3} - \frac{8}{3}Kt \right)^{-3/8}$, d'où

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\left(f_0^{-8/3} - \frac{8}{3}Kt \right)^{3/8}}, \text{ soit aussi } f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{8}{3}f_0^{8/3}Kt \right)^{3/8}}$$

II Freinage par induction

21 - Certains rayons évoluent dans un champ magnétique. C'est similaire au dispositif des rails de Laplace : il va y avoir apparition d'une fem et d'un courant induit.

La loi de Lenz indique que les forces de Laplace associées vont s'opposer au mouvement de la roue : c'est un effet de freinage.

22 - Force de Laplace : $\vec{F}_L = i_0 L \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_x$, d'où $\boxed{\vec{F}_L = -i_0 L B \vec{e}_\theta}$.

Point d'application : le milieu du rayon.

23 - Attention au point d'application qui est au milieu :

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_L) = \frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge \vec{F}_L = \frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge (-i_0 L B) \vec{e}_\theta, \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_L) = -\frac{i_0 B L^2}{2} \vec{e}_x.}$$

24 - Pour avoir le moment total on somme sur les $N/2$ rayons immergés dans le champ magnétique :

$$\boxed{\Gamma_{Ox,L} = -\frac{i_0 B L^2 N}{4}.} \quad (1)$$

25 - $\boxed{\mathcal{P}_L = \Gamma_{Ox,L} \omega = -\frac{i_0 B L^2 N \omega}{4}.}$

26 -

$$\mathcal{P}_L + \frac{N}{2} e i_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = \frac{B L^2 \omega}{2}.}$$

27 - Loi des nœuds au niveau du moyeu O : $\frac{N}{2} i_0 + \frac{N}{2} i_1 = 0$, donc $\boxed{i_0 = -i_1}$.

28 - Loi des mailles en partant de la circonférence, en passant par un rayon parcouru par i_0 , puis un rayon parcouru par i_1 (on est alors revenu à la circonférence) :

$$0 = R i_0 + e - R i_1, \quad \text{donc} \quad 0 = R i_0 + e + R i_0,$$

soit donc $\boxed{i_0 = \frac{e}{2R} = \frac{B L^2}{4R} \omega.}$

29 - On reprend l'expression de $\Gamma_{Ox,L}$ et on injecte celle de i_0 pour obtenir :

$$\boxed{\Gamma_{Ox,L} = -K \omega \quad \text{avec} \quad K = \frac{N B^2 L^4}{16 R}.}$$

Signe moins : ce moment est résistant, conformément à la loi de Lenz.

30 - Théorème du moment cinétique appliqué à la roue selon l'axe Ox :

$$\frac{dJ\omega}{dt} = \Gamma_{Ox,L}, \quad \text{soit } \dot{\omega} + \frac{K}{J}\omega = 0.$$

Ceci fait apparaître la constante de temps $\tau = \frac{J}{K}$. Solution :

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}.$$

31 - Si toute la roue est immergée dans le champ magnétique $B\vec{e}_x$ uniforme, alors il y a apparition d'un courant i_0 identique dans les N rayons. Mais la loi des nœuds au niveau du moyeu donne $Ni_0 = 0$, donc $i_0 = 0$: ce courant ne peut pas circuler.

Il faut donc un champ non uniforme pour permettre au courant de "boucler" quelque part.

32 - Avantages : pas d'usure mécanique car pas de frottements directs, échauffement moins violent qu'avec les freins conventionnels car il se produit dans tout le volume et pas uniquement à la surface, pas de blocage possible de la roue car l'effet s'arrête si la roue ne tourne pas.

Désavantage : couteux et lourd, et il s'agit uniquement d'un ralentisseur car l'effet est proportionnel à ω et ne peut donc pas servir à produire un arrêt complet.

III Façon optimale de pomper

33 - Cas A. La transformation est la suivante :

$$\text{État initial} \left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_0 = 1 \text{ bar} \\ V_1 = V_0 + V_p \\ T_1 = T_0 \\ n_1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{isotherme, gaz parfait}} \text{État final} \left\{ \begin{array}{l} p_2 = ? \\ V_2 = V_0 \\ T_2 = T_0 \\ n_2 = n_1 \end{array} \right.$$

T et n étant constants, on a que $p_1 V_1 = p_2 V_2$, d'où

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_0 \frac{V_0 + V_p}{V_0} = p_0 \left(1 + \frac{V_p}{V_0} \right),$$

d'où $p_2 = p_0(1 + \alpha) = 1,4 \text{ bar}$.

34 - Cas B. Le volume final est évidemment le même que dans le cas A : $V_2 = V_0$.

La température finale est aussi $T_2 = T_0$, puisqu'il est indiqué qu'on attend suffisamment longtemps pour que ce soit le cas.

On a aussi $n_2 = n_1$.

La pression finale est donc $p_2 = \frac{n_2 R T_2}{V_2} = \frac{n_1 R T_0}{V_0}$ identique au cas précédent (car $n_1 R T_0 = p_0(V_0 + V_p)$, d'après la loi des GP appliquée dans l'état initial).

35 - Cas A. Il s'agit d'une compression isotherme ($T = T_0 = \text{cst}$) et mécaniquement réversible ($p = p_{\text{ext}}$) d'un gaz parfait. On a déjà traité ceci en exercice de cours :

$$W = - \int_1^2 p_{\text{ext}} dV = \dots = -n_1 R T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Or ici $n_1 R T_0 = p_0 V_1$ (loi GP à l'instant initial), et $V_2 = V_0$ et $V_1 = V_0 + V_p$, donc on trouve

$$W = p_0 V_1 \ln(1 + \alpha) = 236 \text{ J}.$$

36 - Cas B.

a - L'étape $1 \rightarrow 1'$ est réalisée rapidement, donc les transferts thermiques n'ont pas le temps de s'établir : on peut la supposer adiabatique. De plus l'énoncé indique qu'elle est supposée réversible (on néglige tout frottement).

b - Loi de Laplace (car gaz parfait + adiabatique + réversible) entre les états 1 et 1' :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_{1'} V_{1'}^{\gamma-1}, \text{ d'où } T_{1'} = T_1 \times \left(\frac{V_1}{V_{1'}} \right)^{\gamma-1},$$

avec $T_1 = T_0$, $V_1 = V_0 + V_p$ et $V_{1'} = V_0$, on a donc $T_{1'} = T_0 \times (1 + \alpha)^{\gamma-1} = 343 \text{ K}$.

Remarque : On peut aussi exprimer $p_{1'} = p_1 (V_1/V_{1'})^\gamma = p_0 (1 + \alpha)^\gamma = 1,6 \text{ bar}$, puis utiliser la loi des gaz parfaits pour obtenir $T_{1'}$.

c - ★ L'évolution 1→1' est une compression adiabatique réversible d'un gaz parfait, traitée en exercice de cours :

$$W = - \int_1^{1'} p_{\text{ext}} dV = \dots = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{V_1}{V_{1'}} \right)^{\gamma-1} - 1 \right).$$

Avec $p_1 = p_0$, $V_{1'} = V_0$ et $V_1 = V_0 + V_p$ on obtient $W = 252 \text{ J}$.

Remarque : Autre méthode plus simple : utiliser le premier principe, $\Delta U = W + Q$ avec ici $Q = 0$ et $\Delta U = C_V \Delta T$, donc :

$$W = \Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_{1'} - T_1) = \frac{nRT_1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_{1'}}{T_1} - 1 \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} ((1 + \alpha)^{\gamma-1} - 1).$$

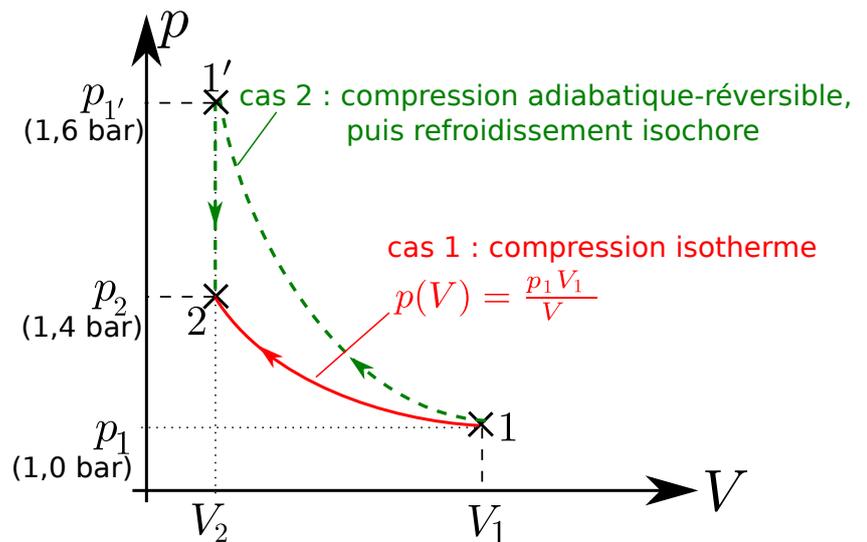
On obtient bien la même chose.

★ Il n'y a ensuite aucun travail supplémentaire à fournir pour l'étape 1' → 2 car elle est isochore.

37 - Schéma ci-contre.

Dans un tel diagramme le travail des forces de pression reçu par le gaz est égal à l'aire sous la courbe (signe plus car ici le sens de parcours est vers les volumes décroissants).

On pouvait donc prédire que ce travail est plus important avec la méthode brutale, car l'aire sous la courbe est plus grande.



38 - Ce travail supplémentaire a servi à augmenter la température du gaz (jusqu'à 343 K). Mais ceci n'est pas utile puisqu'ensuite le gaz refroidit, et cette énergie thermique est dissipée vers la pièce et n'est pas récupérable.

En conclusion tout est une question de temps : si on n'est pas pressé il vaut pomper lentement !