

Physique-chimie – DS 6

- **Calculatrices interdites.**
- Toute A.N. sans **unité** ne comptera aucun point, et dégradera l'humeur du correcteur.
- Vérifiez l'**homogénéité** de vos relations.

I Trous noirs

Un trou noir est une bulle d'espace-temps. Il peut se former lorsque la densité de matière est si grande que même la lumière ne peut plus s'échapper de l'attraction gravitationnelle. Ceci se produit lors d'effondrement d'étoiles (trous noirs stellaires de quelque fois la masse du Soleil) ou par des processus pas encore complètement compris au centre des galaxies (trous noirs supermassifs de plusieurs millions à milliards de fois la masse du Soleil).

Ces objets sont décrits par la théorie de la relativité générale. Deux observations récentes sont venues confirmer les prédictions de cette théorie : l'observation presque directe du trou noir supermassif au centre d'une galaxie voisine (partie I.3), et l'observation d'ondes gravitationnelles (partie I.4).

I.1 Caractéristiques usuelles du mouvement dans un champ de gravitation

Cette première partie commence par redémontrer certains résultats de base concernant les mouvements dans un champ de gravitation.

On considère un corps de masse m en orbite autour d'un corps de masse m_0 très grande situé à l'origine O du repère. Le corps de masse m est décrit par un point M . On note R la distance OM .

On rappelle que la force de gravitation exercée sur le point M s'écrit $\vec{F} = -\frac{Gmm_0}{R^2}\vec{e}_r$ avec \vec{e}_r un vecteur unitaire de O vers M et $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Cas général

- 1 - Montrer que le moment cinétique en O de la masse m , $\vec{\sigma}_O$, est conservé au cours du mouvement.
- 2 - On note \vec{e}_z le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{\sigma}_O$. Montrer qu'à tout instant, \overrightarrow{OM} est perpendiculaire à \vec{e}_z , et donc que le mouvement est dans le plan Oxy .

3 - Dans toute la suite on utilise les coordonnées polaires dans le plan du mouvement Oxy (vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$).

Montrer que la conservation du moment cinétique implique que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement.

Comment interprète-t-on ceci géométriquement ?

Cas circulaire

On s'intéresse ensuite au cas du mouvement circulaire : la distance $R = OM$ est constante.

4 - Montrer que le mouvement est circulaire uniforme, c'est-à-dire que la norme du vecteur vitesse (ou la vitesse angulaire) est constante. On pourra pour cela appliquer le PFD à la masse m .

5 - Donner l'expression de la norme v de la vitesse en fonction de R, m_0 et G .

6 - Donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de G, m_0, m et R , et donner son signe.

1.2 Modèle classique de trou noir

Cette partie propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans un modèle qui utilise uniquement la théorie newtonienne (et donc qui ne peut pas être totalement correct).

On considère un astre de masse m_0 et de rayon R , et un point M de masse m à sa surface.

7 - Montrer que la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre s'écrit $v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}}$.

8 - En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. Dans cette conception classique, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Donner l'expression du rayon d'un astre dont la vitesse de libération est égale à c . Ce rayon est aujourd'hui appelé rayon de Schwarzschild, noté R_S .

En déduire la condition sur le rayon R d'un astre pour qu'il soit un trou noir.

9 - Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$).

Notons que malgré des limites évidentes (théorie uniquement newtonienne, mécanique appliquée à un photon de masse nulle...), le rayon de Schwarzschild est bien la bonne expression (prédite par la théorie de la relativité générale) de la taille d'un trou noir sans rotation de masse m_0 (en fait, c'est le rayon de son horizon, qui est une limite que l'on ne peut franchir que dans un sens).

1.3 Trou noir supermassif

Au centre de notre galaxie

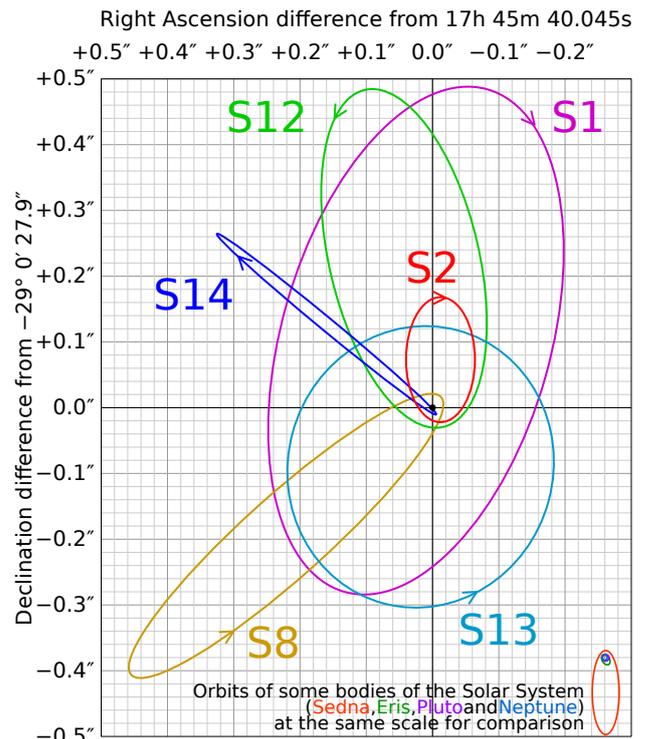
Nous savons aujourd'hui que presque toutes les galaxies ont en leur centre un trou noir supermassif. C'est le cas de la voie lactée (qui est notre galaxie). Ce trou noir n'a pas été observé directement, mais nous avons une preuve indirecte de son existence : le suivi de la trajectoire d'étoiles proches du centre de la galaxie montre qu'elles orbitent autour d'un centre très massif (image ci-contre).

Les observations permettent de connaître les périodes et demi-grand axes de chacune. Par exemple pour l'étoile S1 : $T = (94 \pm 9)$ années et $a = (3300 \pm 190)$ ua.

Une unité astronomique (ua) correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit 150 millions de km, ou $1,5 \times 10^{11}$ m.

On donne la troisième loi de Kepler avec M la masse du trou noir, a le demi-grand axe d'une orbite et T sa période :
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

10 - Estimer la masse du trou noir central. On fera l'application numérique avec un chiffre significatif.



Observation directe au radiotélescope

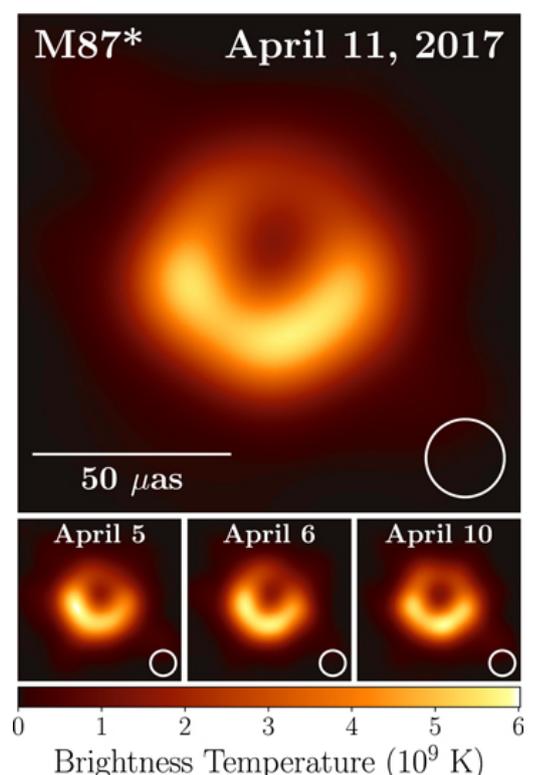
Entre 2017 et 2019, des équipes de chercheurs ont réussi à obtenir une image directe du trou noir supermassif situé au centre de la galaxie M87* (une galaxie voisine de la notre).

L'image n'est pas une image dans le visible, mais dans le rayonnement radio ($\lambda = 1,3$ mm).

Ils ont pour cela utilisé un ensemble de radiotélescopes répartis sur toute la surface de la Terre, afin d'obtenir l'équivalent d'un unique radiotélescope dont le diamètre est de l'ordre de celui de la Terre.

L'image ci-contre montre le disque de matière qui tourne autour du trou noir avant de s'y engouffrer.

La résolution angulaire sur l'image est de l'ordre de 10^{-10} radian.



La résolution d'un télescope est limitée par la diffraction de la lumière à son entrée : si D est le diamètre du télescope, l'angle de résolution θ vérifie $\sin \theta \simeq \frac{\lambda}{D}$.

11 - En déduire le diamètre du télescope nécessaire pour atteindre la résolution de l'image.

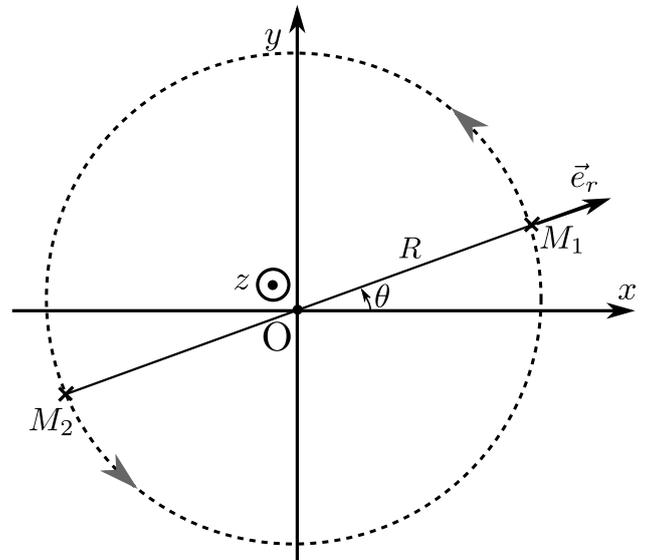
12 - Comment les scientifiques ont-ils fait pour atteindre un tel diamètre ?

1.4 Fusion de trous noirs stellaires

Une autre confirmation éclatante de l'existence des trous noirs et de la précision de la théorie de la relativité générale est l'observation d'ondes gravitationnelles produites par la fusion de deux trous noirs. Cette partie s'intéresse à la trajectoire des deux trous noirs.

On considère deux corps, chacun de masse m , qui orbitent l'un autour de l'autre. On se place dans le repère centré sur le centre de masse O de l'ensemble. On supposera la trajectoire de chacun circulaire uniforme et plane dans ce repère (cf schéma).

On note M_1 le corps numéro 1, et M_2 le second. On note $R = OM_1$ et $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM_1}/OM_1$, ainsi que $r = M_1M_2 = 2R$.



Le corps 1 est soumis à la force suivante de la part du corps 2 : $\vec{F} = -\frac{Gm^2}{(2R)^2}\vec{e}_r$, car la distance le séparant de M_2 est $2R$.

13 - En appliquant le PFD, montrer que $v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{4R}}$ (norme de la vitesse du corps 1).

14 - En déduire l'expression de la période T du mouvement en fonction de m , R et G .

On note $f = 1/T$ la fréquence associée. Montrer que $f^2 = \frac{Gm}{16\pi^2 R^3}$.

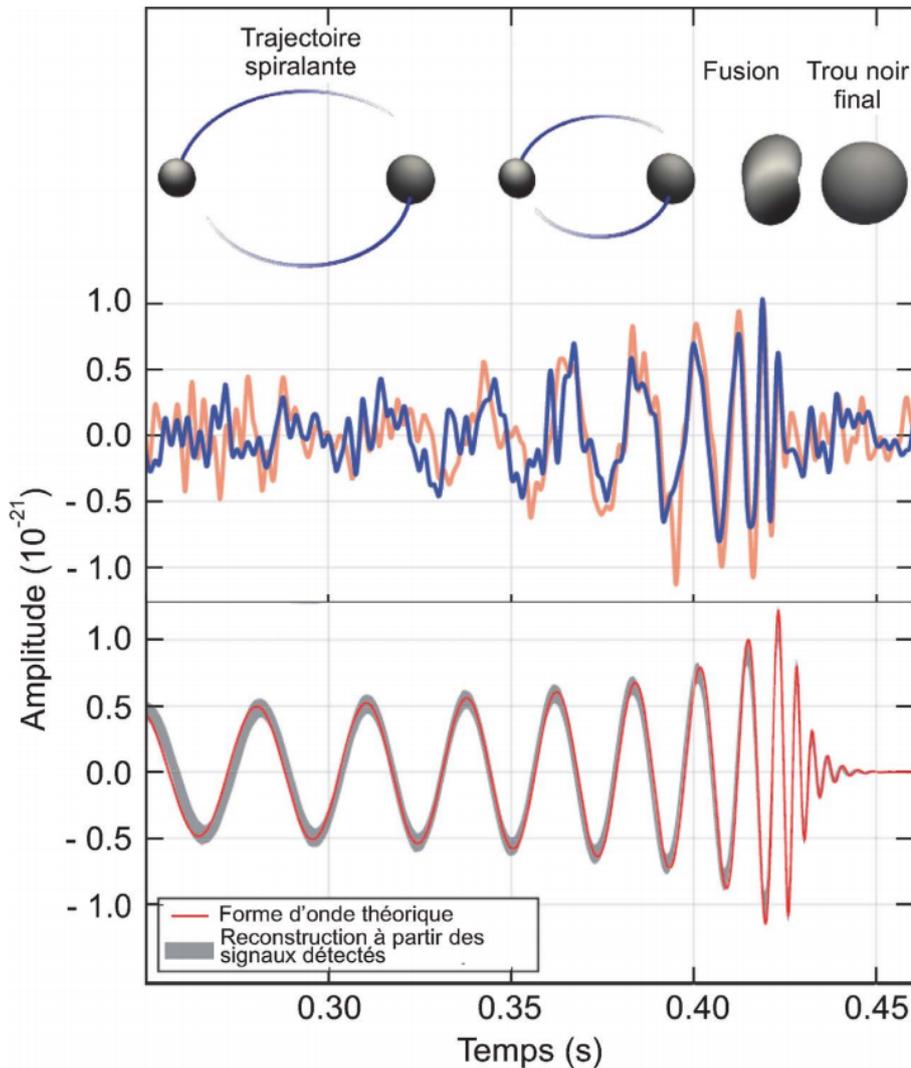
15 - Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction associée à la force exercée par le corps 2 sur le corps 1.

16 - La norme de la vitesse du corps 2 est la même que celle du corps 1. L'énergie mécanique totale du système est la somme de l'énergie cinétique de chaque corps, et de l'énergie potentielle d'interaction entre les deux corps obtenue à la question précédente.

Montrer que cette énergie mécanique totale s'écrit $E_m = -\frac{Gm^2}{4R}$.

17 - Montrer qu'on a la relation suivante : $E_m = -\alpha f^{2/3}$ avec $\alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$.

On s'intéresse au cas où les deux corps sont des trous noirs en rotation rapprochée l'un autour de l'autre. La théorie de la relativité générale prévoit que leur mouvement rapide déforme l'espace-temps et provoque ainsi l'émission d'ondes gravitationnelles à grande distance. Après un voyage de plusieurs milliards d'années dans l'espace, ces ondes peuvent être enregistrées sur Terre depuis 2015 à l'aide des interféromètres géants Ligo et Virgo situés aux États-Unis et en Italie. Ci-dessous figure le premier signal enregistré en 2015 et associé à la fusion de deux trous noirs.



En haut : schéma des différentes phases du mouvement ;

au milieu : signal enregistré par le détecteur ;

en bas : signal prédit par la relativité générale et comparaison avec une moyenne des signaux enregistrés.

Le rayonnement d'ondes gravitationnelles emporte une partie de l'énergie du système : $E_m(t)$ décroît.

18 - En vous basant sur les relations démontrées précédemment, prédire comment évolue la distance de séparation R , ainsi que la fréquence f du mouvement.

Ceci est-il en accord avec l'enregistrement du signal de 2015 ?

La théorie de la relativité générale permet de prédire la puissance emportée par les ondes gravitationnelles :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{2}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m^5}{R^5}.$$

- 19 - Montrer qu'on obtient l'équation différentielle suivante qui donne l'évolution de la fréquence f du mouvement : $\frac{df}{dt} = K f^{11/3}$, avec $K > 0$ une constante dont on ne cherchera pas à donner l'expression.
- 20 - Résoudre cette équation pour exprimer $f(t)$ en fonction de K , f_0 et t (f_0 est la fréquence à $t = 0$).

La connaissance de l'évolution de $f(t)$ permet ensuite de prédire la forme du signal reçu. Comme le montre la figure ci-dessus, la comparaison entre cette prédiction théorique et l'expérience est excellente (la prédiction théorique prend toutefois en compte des effets de relativité générale non mentionnés dans ce sujet). On peut alors en déduire les masses des trous noirs : dans le cas présent l'un de 29 et l'autre de 36 masses solaires, situés à 1,3 milliards d'années lumières de la Terre...

Pour plus d'informations sur les trous noirs et les aspects évoqués dans ce sujet, voir le site de la classe, rubrique actualités.

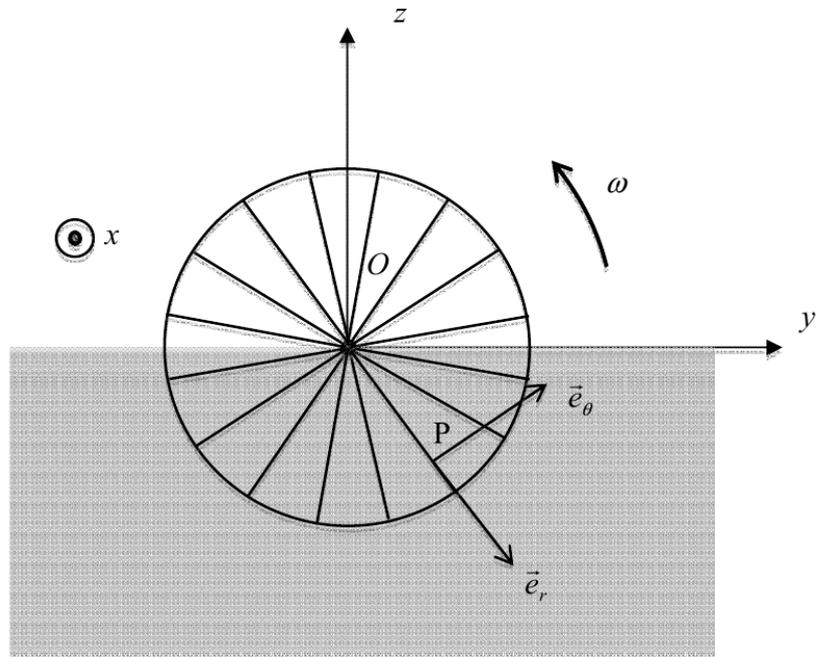
II Freinage par induction

On s'intéresse ici au principe du freinage par induction, qui est un dispositif de freinage complémentaire utilisé sur les camions, les autobus ou les trains, entre autres. (Ci-contre un exemple sur un train rapide japonais Shinkansen.)

On modélise le problème de la façon simplifiée suivante. Il y a, solidaire à la roue, une seconde roue constituée par N rayons conducteurs identiques. Les extrémités des rayons sont en contact électrique avec la circonférence d'un cercle de résistance électrique nulle, et avec le centre O de la roue. Ils sont régulièrement répartis. Chaque rayon a une longueur L et une résistance électrique R .



Un champ magnétique permanent $\vec{B} = B\vec{e}_x$ est créé dans la portion d'espace telle que $z < 0$ (zone grise sur la figure). Le champ magnétique est nul dans la zone d'espace telle que $z > 0$. La disposition de la roue est telle que sa moitié inférieure ($z < 0$) est immergée dans le champ magnétique alors que sa moitié supérieure n'est soumise à aucun champ.



La roue tourne autour de son axe Ox avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_x$. On note J son moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{Ox} . Les frottements mécaniques sont négligés.

21 - Justifier l'apparition du phénomène d'induction dans les rayons (on pourra se référer à un dispositif connu vu en cours).

Quel sera l'effet de ce phénomène sur le mouvement de la roue ?

Tous les rayons étant en contact électrique d'une part avec la circonférence de la roue (de résistance nulle) et d'autre part avec le moyeu O de la roue, et compte-tenu de la symétrie de rotation de la roue, on admet que :

- chaque rayon immergé dans le champ magnétique est parcouru par le même courant d'intensité i_0 ;
- chaque rayon non soumis au champ magnétique est parcouru par un courant d'intensité i_1 .

22 - On considère un rayon immergé dans le champ magnétique. Donner l'expression de la résultante des forces de Laplace qui s'exerce sur ce rayon en fonction de i_0 , L , B et d'un vecteur unitaire.

Quel est son point d'application ?

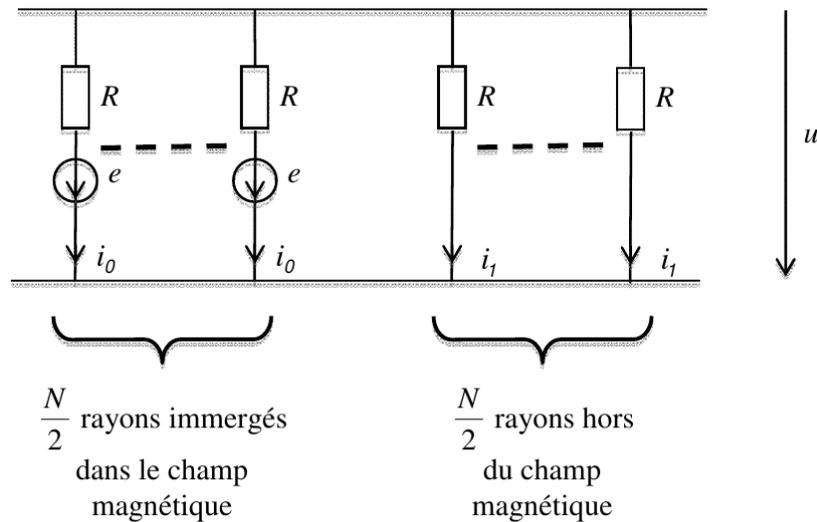
23 - Donner ensuite l'expression du moment en O associé à cette force de Laplace, toujours pour un rayon.

24 - En déduire que le moment selon l'axe Ox des forces de Laplace sur l'ensemble de la roue s'écrit :

$$\Gamma_{Ox,L} = -\frac{i_0 B L^2 N}{4}. \quad (1)$$

25 - La puissance associée aux forces de Laplace s'écrit $\mathcal{P}_L = \Gamma_{Ox,L} \times \omega$. En déduire l'expression de cette puissance.

Le schéma électrique équivalent à la roue est le suivant, avec e la fem induite par le mouvement d'un rayon immergé et u la différence de potentiel entre moyeu et circonférence :



Pour déterminer l'expression de la fem e induite dans chaque rayon, on utilise la conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\mathcal{P}_L + \frac{N}{2} e i_0 = 0.$$

26 - En déduire l'expression de e .

27 - Quelle est la relation entre i_0 et i_1 ?

28 - Montrer que $i_0 = \frac{BL^2}{4R} \omega$.

29 - Finalement, en déduire que le moment $\Gamma_{Ox,L}$ s'écrit $\Gamma_{Ox,L} = -K\omega$ avec K une constante dont on donnera l'expression en fonction de B , L , N et R . Ce moment est-il moteur ou résistant ?

30 - La roue est lancée avec une vitesse angulaire initiale $\omega_0 > 0$.

Déterminer l'équation différentielle suivie par $\omega(t)$ et la résoudre. On fera apparaître un temps caractéristique τ qui fait intervenir la constante K .

En réalité la roue n'est pas constituée de rayons, mais il s'agit d'un disque plein dans lequel vont s'établir des courants (dits courants de Foucault). Et le champ magnétique n'est pas uniforme dans une moitié et nul ailleurs, mais alterne en direction ($\pm \vec{e}_x$) et est produit par des électroaimants commandés par l'action sur la pédale de frein.

31 - Nécessité d'un champ non uniforme : expliquer pourquoi, dans notre modélisation, il n'y aurait pas d'effet si toute la roue était immergée dans le champ magnétique $B\vec{e}_x$ uniforme.

32 - Donner un avantage et une limite de ce type de dispositif de freinage.

Pour en savoir plus : https://fr.wikipedia.org/wiki/Courants_de_Foucault#Freinage
<https://fr.telma.com/produits/fonctionnement>

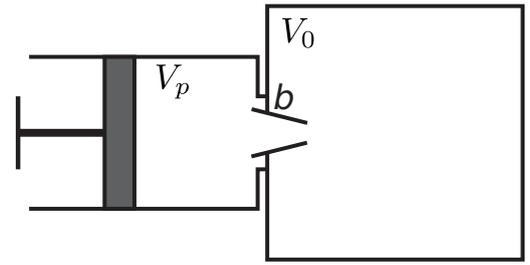
III Façon optimale de pomper

On s'intéresse au gonflage d'un pneu de vélo à l'aide d'une pompe manuelle. On s'intéresse ici uniquement au premier coup de pompe, décrit ci-contre, pendant lequel la soupape (b) reste toujours ouverte. On cherche l'évolution pour laquelle l'énergie à fournir est minimale.

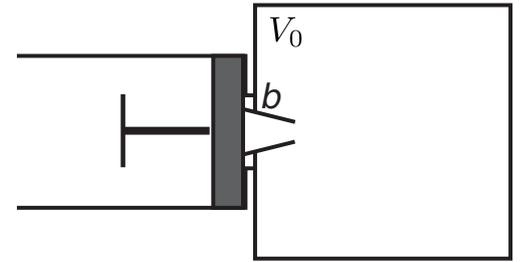
Le volume de la pompe est $V_p = 2,0\text{ L}$, celui de la chambre à air est $V_0 = 5,0\text{ L}$ (constant), et l'ensemble est à $T_0 = 300\text{ K}$. La pression est initialement de 1 bar partout.

On note 2 l'état final. On envisage deux moyens de réaliser cette compression :

- Cas A : de façon très lente. Dans ce cas les échanges thermiques ont le temps de s'établir et la température reste constante égale à T_0 .
- Cas B : de façon brutale. Dans ce cas la température du gaz va augmenter et il faudra, après la compression, attendre qu'elle redescende à T_0 . C'est après avoir attendu qu'on atteigne l'état final noté "état 2".



état 1, volume $V_1 = V_0 + V_p$



état 2, volume $V_2 = V_0$

On suppose dans les deux cas la transformation mécaniquement réversible, et le gaz est modélisé par un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = 1,4$.

- 33** - Dans le cas A, que valent la température finale T_2 et le volume final V_2 ? Donner ensuite l'expression de la pression finale p_2 en fonction de p_0 et $\alpha = V_p/V_0 = 0,4$, puis sa valeur.
- 34** - Faire de même dans le cas B (indice : justifier que c'est identique au cas A).
- 35** - Dans le cas A : donner l'expression du travail à fournir au gaz pour le comprimer en fonction de p_0 , $V_1 = V_0 + V_p$ et $\alpha = V_p/V_0$. L'application numérique donne $W = 236\text{ J}$.
- 36** - Dans le cas B il faut décomposer la transformation en deux : de l'état 1 à un état 1' il s'agit de la compression brutale où le volume passe de $V_1 = V_0 + V_p$ à $V_{1'} = V_0$; puis de l'état 1' à l'état 2 le volume ne change plus et le gaz se refroidit jusqu'à T_0 .
- a - Expliquer pourquoi l'étape $1 \rightarrow 1'$ peut être supposée adiabatique et réversible.
 - b - Donner l'expression de la température atteinte en 1' en fonction de T_0 , α et γ .
 - c - Donner l'expression du travail à fournir au gaz durant l'évolution $1 \rightarrow 1'$ en fonction de grandeurs connues.
Donner ensuite l'expression du travail à fournir durant l'étape $1 \rightarrow 2$.

L'application numérique donne $W = 252\text{ J}$ pour l'évolution complète de 1 à 2.

37 - Tracer sur un même diagramme p - V les cas A et B.

Pouvait-on prédire à partir de ce diagramme le fait que le travail à fournir est plus grand pour une des deux compressions ?

38 - À quoi a servi le surplus de travail fourni dans la compression qui en nécessite le plus ?

En conclusion, vaut-il mieux être brutal ou lent ?

Ce qui précède a des conséquences pratiques importantes à l'échelle industrielle. Il existe en effet des stations qui stockent de l'air comprimé dans d'immenses réservoirs (souvent des cavités géologiques) et qui réutilise ensuite cet air pour faire tourner une turbine et produire de l'électricité. La phase de compression de l'air doit consommer le moins possible d'énergie, et ce qui précède montre donc qu'elle a intérêt à être proche de l'isotherme réversible. Cf par exemple <https://www.connaissancedesenergies.org/fiche-pedagogique/caes-stockage-par-air-comprime>.

