DM – Correction – Pendule pesant magnétique

1 - Notons A l'extrémité inférieure de la tige. Le courant est orienté de O vers A donc :

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = I\,\vec{OA} \wedge \vec{B} = I(l\vec{e}_r) \wedge (-B\vec{u}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_{\mathrm{L}} = IlB\vec{e}_\theta\,.}$$

2 - Moment : $\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_{\mathrm{L}}) = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{2} \wedge \vec{F}_L = \dfrac{l}{2}\vec{e}_r \wedge IlB\vec{e}_\theta = \dfrac{Il^2B}{2}\vec{e}_z$ et donc

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F}_{\mathrm{L}}) = \frac{I\,l^2\,B}{2}\,.}$$

3 - ⋆ Liaison pivot : on la suppose parfaite donc son moment est nul.

⋆ Poids : il s'applique en G, au milieu de la tige, et sa résultante est $\vec{P} = m\vec{g}$. Le moment vectoriel en O vaut donc

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = OG \times mg \times \sin\theta \times (-\vec{e}_z)$$

($-\vec{e}_z$ se voit avec la main droite). Par projection selon $\vec{e}_z$ on en déduit :

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = -\frac{mgl}{2}\sin\theta\,.}$$

4 - Lorsque le pendule est à l'équilibre,

$$\Gamma_{Oz}(\vec{P}) + \Gamma_{Oz}(\vec{F}_{\mathrm{L}}) = 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{mgl}{2}\sin\theta_{\mathrm{eq}} + \frac{I\,l^2\,B}{2} = 0$$

et θ_{eq} est donc tel que

$$\boxed{\sin\theta_{\mathrm{eq}} = \frac{I\,l\,B}{mg}\,.}$$

Il y a deux solutions, symétriques par rapport à $\pi/2$.

De plus, elles n'existent que si $\frac{I\,l\,B}{mg} \leq 1$. Dans le cas contraire, la force de Laplace est assez forte pour faire continuement tourner le pendule.

5 - D'après la loi du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{2}\sin\theta + \frac{I\,l^2\,B}{2}$$

ce qui s'écrit sous forme canonique

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = kI \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{2J}} \quad \text{et} \quad k = \frac{l^2\,B}{2J}\,.}$$

6 - L'équation du mouvement se linéarise en

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = kI$$

Les solutions sont du type $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \theta_{\text{particulière}}$.

On trouve $\theta_{\text{particulière}}$ en la supposant constante : on a $\omega_0^2\theta_{\text{particulière}} = kI$ d'où $\theta_{\text{particulière}} = \dfrac{kI}{\omega_0^2}$.

Donc $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \dfrac{kI}{\omega_0^2}$.

CI1 : $\theta(0) = \theta_0$ donc $A + \dfrac{kI}{\omega_0^2} = \theta_0$ donc $A = \theta_0 - \dfrac{kI}{\omega_0^2}$.

CI2 : $\dot{\theta}(0) = 0$. Or $\dot{\theta}(t) = A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$. Donc $\omega_0 B = 0$ et donc $B = 0$.

Finalement, $\boxed{\theta(t) = \left(\theta_0 - \dfrac{kI}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t + \dfrac{kI}{\omega_0^2}.}$

La période est (on pouvait le dire avant la résolution) :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mgl}}\,.}$$