

I Mise en orbite d'un satellite

D'après concours ATS 2014.

1 - $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v}_M = \frac{dr\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

2 - $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r = -\frac{g_0mR_T^2}{r^2}\vec{u}_r$. Force attractive.

Remarque : le numérateur s'écrit habituellement GmM_T à la place de $g_0mR_T^2$.

3 - $\star \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$ d'où $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$.

Il s'agit du moment cinétique en O .

\star Norme $L_O = mr^2|\dot{\theta}|$.

\star Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car \overrightarrow{OM} et \vec{F} colinéaires.
Donc \vec{L}_O est constant.

4 - Circulaire donc $r = \text{cst}$ donc $\dot{r} = 0$. On a donc $\vec{v}_M = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v\vec{u}_\theta$.

On dérive pour avoir $\vec{a}_M = \dot{v}\vec{u}_\theta - v\dot{\theta}\vec{u}_r$.

On remplace $\dot{\theta}$ par v/r et donc : $\vec{a}_M = \dot{v}\vec{u}_\theta - \frac{v^2}{r}\vec{u}_r$.

5 - PFD au satellite : $m\vec{a}_M = \vec{F}$.

Sur \vec{u}_θ on a : $\dot{v} = 0$, donc $v = \text{cst}$ et le mouvement est uniforme.

Sur \vec{u}_r on a : $-m\frac{v^2}{r} = -\frac{g_0mR_T^2}{r^2}$, d'où $v^2 = \frac{g_0R_T^2}{r}$.

6 - D'où $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg_0R_T^2}{2r}$ et $E_m = E_c + E_p = \frac{mg_0R_T^2}{2r} - \frac{mg_0R_T^2}{r}$, donc $E_m = -\frac{mg_0R_T^2}{2r}$.

7 - AN : $E_m = -\frac{4 \times 10^3 \times 10 \times (6,4 \times 10^6)^2}{2 \times 8 \times 10^6} = -1 \times 10^{11} \text{ J}$

et $E_m = -\frac{4 \times 10^3 \times 10 \times (6,4 \times 10^6)^2}{2 \times 40 \times 10^6} = -2 \times 10^{10} \text{ J}$.

Négatif car mouvement borné (on dit aussi mouvement lié).

8 - $E_m = \text{cst}$ car toutes les forces sont conservatives (la seule force prise en compte est celle de gravitation, et il existe une énergie potentielle associée).

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mg_0R_T^2}{r}.$$

Et on utilise $|\dot{\theta}| = \frac{L_0}{mr^2}$ pour avoir $E_m = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{L_0^2}{m^2 r^4} \right) - \frac{mg_0R_T^2}{r}$.

D'où
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{mr^2} - \frac{mg_0R_T^2}{r}.$$

9 - On a $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$, donc comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, il vient que $E_m \geq E_{p,\text{eff}}$.

10 - Les r accessibles pour E_{m1} (avec la condition de la question précédente) ne sont pas bornés : il s'agit d'une trajectoire ouverte, hyperbolique.

Les r accessibles pour E_{m2} sont bornés, il s'agit d'une trajectoire bornée, elliptique.

La trajectoire circulaire est à $r = \text{cst}$, donc pour $E_m = E_{\text{min}}$.

11 - En ces deux points, on a $\dot{r} = 0$.

D'autre part, $r_h + r_b = 2a$.

12 - En ces deux points, on a $\dot{r} = 0$ et donc : $E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{=0} + \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{mr^2} - \frac{mg_0R_T^2}{r}$.

On multiplie par r^2 : $r^2 E_m = \frac{L_0^2}{2m} - (mg_0R_T^2) r$, soit :

$$r^2 + \underbrace{\frac{mg_0R_T^2}{E_m}}_{=\alpha} r - \underbrace{\frac{L_0^2}{2mE_m}}_{=\beta} = 0.$$

13 - Racines $r_b = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_h = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$. La somme est :

$$r_b + r_h = -\alpha, \quad \text{soit} \quad 2a = -\frac{mg_0R_T^2}{E_m}, \quad \text{soit} \quad E_{m,t} = -\frac{mg_0R_T^2}{2a}.$$

14 - On a $E_m = E_{p,\text{eff}}$ en $r = r_b = 8000 \text{ km}$ et en $r = r_h = 40\,000 \text{ km}$. On voit donc que $E_m \approx -30 \text{ GJ}$.

15 - Orbite basse : $r = r_b$ et donc $E_{m,b} = -100 \text{ GJ}$. Orbite haute : $r = r_h$ et donc $E_{m,h} = -20 \text{ GJ}$.

16 - $\Delta E_{mP} = E_{m,t} - E_{m,b} = -30 - (-100) = 70 \text{ GJ}$.

Il faut une masse de carburant
$$m_c = \frac{70 \times 10^9}{50 \times 10^6} = 1,4 \times 10^3 \text{ kg}.$$

17 - Carburants : ergols liquides, cf https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur-fus%C3%A9e#Moteur_%C3%A0_ergols_liquides

Orbite géostationnaire : orbite telle que le satellite est toujours à la verticale du même point sur Terre. C'est une orbite dans le plan de l'équateur, à une altitude de 36 000 km.

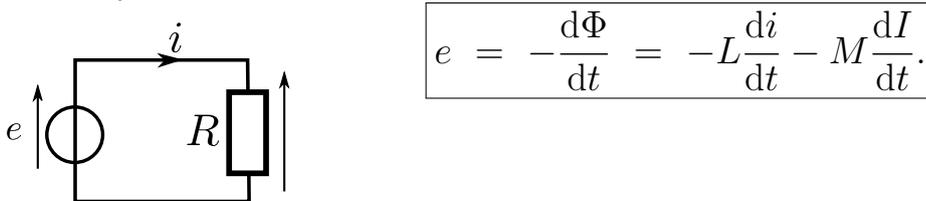
II Pince ampèremétrique

18 - Il s'agit du phénomène d'induction : la présence d'un courant $I(t)$ variable dans le fil central crée un champ magnétique variable, dont le flux à travers les spires de la pince varie, ce qui crée une fem induite et donc un courant dans les spires.

19 - \vec{n} est orienté selon $+\vec{e}_\theta$.

20 - Par définition, $\Phi = Li + MI$, d'où $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} a \ln \frac{3}{2}$ et $M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} a \ln \frac{3}{2}$.

21 - La fem induite est en convention générateur, et sa valeur est donnée par la loi de Faraday :



22 - On écrit l'équation électrique du circuit à l'aide d'une loi des mailles : $e = Ri \Rightarrow -L\frac{di}{dt} -$

$$M\frac{dI}{dt} = Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = -\frac{M}{L}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = -\frac{1}{N}\frac{dI}{dt}, \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

23 - En complexes l'équation devient : $j\omega \underline{i} + \frac{1}{\tau} \underline{i} = -\frac{1}{N}j\omega \underline{I}$, d'où $\underline{H} = \frac{\underline{i}}{\underline{I}} = -\frac{1}{N} \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$.

24 - On a $\underline{H}(0) = 0$ et $\underline{H}(+\infty) = -1/N$. Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

On a l'allure classique d'un passe haut du premier ordre.

25 - Il faut que $\omega\tau \gg 1$ pour avoir $\underline{H} \simeq \frac{-1}{N}$, donc que $\omega \gg \frac{1}{\tau}$.

On a alors $\underline{i} = \frac{-\underline{I}}{N}$, et donc en passant en réels : $i(t) = \frac{-I(t)}{N}$.

Remarque : On constate que prendre un nombre N élevé de spires réduit le courant $i(t)$ dans la pince. Mais l'avantage d'un N élevé est d'augmenter la valeur de L et donc de τ , et donc d'augmenter la gamme de fréquences dans laquelle la pince fonctionne selon l'équation simple $i = -I/N$.

26 - Non, car si I ne dépend pas du temps, alors le champ magnétique ne dépend pas du temps non plus, et donc la fem induite est nulle ($e = -d\Phi_{\text{tot}}/dt = 0$). On voit donc sur le schéma électrique que le courant $i(t)$ est donc nul.

Cela se voit aussi sur la fonction de transfert qui est nulle en $\omega = 0$.

III Pendule pesant magnétique

27 - Notons A l'extrémité inférieure de la tige. Le courant est orienté de O vers A donc :

$$\vec{F}_L = I \vec{OA} \wedge \vec{B} = I(l\vec{e}_r) \wedge (-B\vec{u}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_L = IlB\vec{e}_\theta.}$$

28 - Moment : cette force a toujours pour effet de faire tourner le pendule dans le sens direct autour de \vec{e}_z . Comme son bras de levier vaut $l/2$ (le point d'application est au milieu), on en déduit le résultat

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) = \frac{Il^2 B}{2}.}$$

29 - ★ Liaison pivot : on la suppose parfaite donc son moment est nul.

★ Poids : il s'applique en G , au milieu de la tige, et sa résultante est $\vec{P} = m\vec{g}$. Le moment vectoriel en O vaut donc

$$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = OG \times mg \times \sin \theta \times (-\vec{e}_z)$$

($-\vec{e}_z$ se voit avec la main droite). Par projection selon \vec{e}_z on en déduit :

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{P}) = -\frac{mgl}{2} \sin \theta.}$$

30 - Lorsque le pendule est à l'équilibre,

$$\Gamma_{Oz}(\vec{P}) + \Gamma_{Oz}(\vec{F}_L) = 0 \quad \text{soit} \quad -\frac{mgl}{2} \sin \theta_{\text{eq}} + \frac{Il^2 B}{2} = 0$$

et θ_{eq} est donc tel que

$$\boxed{\sin \theta_{\text{eq}} = \frac{IlB}{mg}.}$$

Il y a deux solutions, symétriques par rapport à $\pi/2$.

De plus, elles n'existent que si $\frac{IlB}{mg} \leq 1$. Dans le cas contraire, la force de Laplace est assez forte pour faire continuellement tourner le pendule.

31 - D'après la loi du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{2} \sin \theta + \frac{I l^2 B}{2}$$

ce qui s'écrit sous forme canonique

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = kI \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{2J}} \quad \text{et} \quad k = \frac{l^2 B}{2J}.$$

32 - Pour pouvoir approximer $\sin \theta \simeq \theta$ tout au long du mouvement, il faut en particulier que cela soit vrai pour la position initiale, qui doit être telle que

$$\theta_0 \ll 1$$

mais aussi pour la position d'équilibre, ce qui implique

$$\frac{I l B}{mg} \ll 1 \quad \text{soit} \quad I \ll \frac{mg}{lB}.$$

33 - L'équation du mouvement se linéarise en

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = kI$$

Les solutions sont du type $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \theta_{\text{particulière}}$.

On trouve $\theta_{\text{particulière}}$ en la supposant constante : on a $\omega_0^2 \theta_{\text{particulière}} = kI$ d'où $\theta_{\text{particulière}} = \frac{kI}{\omega_0^2}$.

Donc $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{kI}{\omega_0^2}$.

CI1 : $\theta(0) = \theta_0$ donc $A + \frac{kI}{\omega_0^2} = \theta_0$ donc $A = \theta_0 - \frac{kI}{\omega_0^2}$.

CI2 : $\dot{\theta}(0) = 0$. Or $\dot{\theta}(t) = A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$. Donc $\omega_0 B = 0$ et donc $B = 0$.

Finalement,
$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{kI}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{kI}{\omega_0^2}.$$

34 - La période est (on pouvait le dire avant la résolution) :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{mgl}}.$$

35 - En complexes :

$$(j\omega)^2 \underline{\theta} + \omega_0^2 \underline{\theta} = k \underline{I}, \quad \text{d'où} \quad \underline{\theta} (\omega_0^2 - \omega^2) = k \underline{I},$$

$$\text{et donc} \quad \underline{H} = \frac{\underline{\theta}}{\underline{I}} = \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

36 - Basse fréquences : $\underline{H} \sim \frac{k}{\omega_0^2}$. C'est l'expression de la position d'équilibre trouvée précédemment. Pas de déphasage entre i et θ , tout se passe comme si le pendule restait en permanence à sa position d'équilibre, cette position changeant lentement au cours du temps sous l'effet des variations de i .

Haute fréquences : $\underline{H} \sim -\frac{k}{\omega^2}$ et tend vers zéro. Ainsi l'amplitude des oscillations devient nulle. L'inertie du pendule l'empêche de suivre les variations imposées par le courant. Déphasage de π .

37 - Lorsque $\omega = \omega_0$, $|\underline{H}|$ diverge, ce qui voudrait dire que l'amplitude θ_m devient infinie : il y a résonance. L'amplitude est infinie car on a négligé les frottements. Le facteur de qualité de notre modèle est donc infini. En réalité, les frottements empêchent ceci.

38 - On a :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\omega_0^2 \sin \theta + k \times I_m \cos \omega t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ -\omega_0^2 \sin y_0 + k \times I_m \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $\frac{dy}{dt} = F(y,t)$ avec $F(y,t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -\omega_0^2 \sin y_0 + k \times I_m \cos \omega t \end{pmatrix}$.

39 -

```
def F(y,t):
    return (y[1], -w0**2*np.sin(y[0]) + k*Im*np.cos(w*t)) # à COMPLÉTER

t = np.linspace(0,5*2*3.14/w0,1000) # tableau des temps
theta0 = np.pi/2 # à COMPLÉTER
theta_prime0 = 0 # à COMPLÉTER
y_ini = (theta0,theta_prime0) # valeur initiale de y
y_sol = spi.odeint(F, y_ini, t) # appel à spi.odeint à COMPLÉTER
theta = y_sol[:,0] # récupération de la solution
theta_prime = y_sol[:,1]

plt.figure("figure")
plt.plot(t, theta) # tracé de theta en fonction de t, à COMPLÉTER
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("theta (degrés)")
plt.show()
```