

# Théorème de l'énergie cinétique et premier principe

<b>I</b>	<b>Commençons par un exemple : gaz dans une enceinte</b>	<b>2</b>
I.1	Compression adiabatique du gaz . . . . .	2
I.2	Échauffement isochore du gaz . . . . .	2
I.3	Conclusion . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Démonstrations des deux TEC et du premier principe</b>	<b>3</b>
II.1	Rappel : énoncé du premier principe . . . . .	3
II.2	Démonstration du “TEC macroscopique” . . . . .	4
II.3	Démonstration du “TEC microscopique” . . . . .	5
II.4	“Démonstration” du premier principe à partir du “TEC microscopique” . . . . .	5
<b>III</b>	<b>Bilan</b>	<b>7</b>
<b>IV</b>	<b>Trois exemples</b>	<b>8</b>
IV.1	Cube glissant sur un support . . . . .	8
IV.2	Fluide en écoulement dans une conduite . . . . .	9
IV.3	Système en régime stationnaire . . . . .	9
<b>V</b>	<b>Annexe : autre choix de définition de <math>U</math></b>	<b>10</b>
<b>VI</b>	<b>Annexe : le TEC macroscopique en mécanique des milieux continus</b>	<b>11</b>
VI.1	Introduction et conservation de la quantité de mouvement . . . . .	11
VI.2	Vers une équation de conservation de l'énergie . . . . .	11
VI.3	Exemple : retour sur l'expérience de Joule . . . . .	13
VI.4	Autre exemple : chauffage par transfert thermique . . . . .	13

## Résumé :

Le premier principe et le théorème de l'énergie cinétique sont deux théorèmes énergétiques issus de deux théories distinctes : la thermodynamique et la mécanique des systèmes. Ils sont conjointement valables et utilisables lorsque ces deux théories s'appliquent. Nous explorons ici les liens entre ces deux théorèmes, liens qui ne sont pas toujours triviaux : selon l'échelle à laquelle on se place, les termes d'énergie cinétique et de travail présents dans chacun peuvent renvoyer à des grandeurs différentes. Nous parlerons également du principe fondamental de la dynamique appliqué au système, dont le produit scalaire avec la vitesse du centre de masse donne un autre théorème de l'énergie cinétique, version “macroscopique” ou du “pseudo-travail”, qui a toute son utilité.

## Introduction

---

La première partie de cet article utilise l'exemple simple du gaz dans une enceinte afin de mettre en évidence certaines difficultés lors de l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique (TEC) dans un contexte thermodynamique. Nous y voyons notamment que le travail peut tantôt être égal au travail du premier principe, tantôt au transfert thermique, et que l'énergie cinétique n'est pas simple à exprimer.

La seconde partie élargit la discussion en proposant une démonstration du TEC (en fait de deux TEC) et du premier principe, en partant d'une description mécanique d'un système quelconque. Nous distinguerons trois théorèmes : (i) le premier principe issu de la thermodynamique, (ii) le TEC “microscopique” issu de la mécanique des systèmes, obtenu en sommant les TEC appliqués à chaque entité élémentaire du système, et (iii) le TEC “macroscopique” issu de la mécanique des systèmes (ou de la mécanique des milieux continus), qui n'est rien d'autre que le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué au système pris en produit scalaire avec la vitesse du centre de masse (ou du PFD appliqué aux particules de fluide pris en produit scalaire avec leur vitesse).

Ces considérations permettront de clarifier les liens entre ces théorèmes, dont un résumé est proposé dans la partie III. Puis la quatrième partie propose des exemples d'application.

# I Commençons par un exemple : gaz dans une enceinte

## I.1 Compression adiabatique du gaz

Considérons un gaz dans une enceinte de volume  $V$ , fermée par un piston. L'ensemble est parfaitement calorifugé. Le système étudié est {gaz+enceinte+piston}. On comprime le gaz en exerçant une pression extérieure  $p_{\text{ext}}$  sur le piston.

★ En négligeant les variations d'énergie interne de l'enceinte et du piston (par exemple leur température ne varie pas significativement sur le temps de l'expérience), ainsi que le mouvement du centre de masse du gaz, le premier principe entre deux instants proches s'écrit :

$$d\left(\frac{1}{2}M_{\text{piston}}v_{\text{piston}}^2\right) + dU_{\text{gaz}} = \underbrace{\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}}_{=-p_{\text{ext}}dV} \quad (1)$$

Nous noterons dans tout l'article  $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  le travail reçu par le système de la part d'interactions externes, travail qui intervient dans la formulation du premier principe.

★ D'un autre côté, le théorème de l'énergie cinétique appliqué au même système s'écrit :

$$\underbrace{dE_{c,\text{tot}}}_{=d\left(\frac{1}{2}M_{\text{piston}}v_{\text{piston}}^2\right)+dE_{c,\text{micro}}} = \delta W_{\text{ext du TEC}} + \underbrace{\delta W_{\text{int,micro}}}_{=0} \quad (2)$$

Nous noterons dans tout l'article  $\delta W_{\text{ext du TEC}}$  le travail reçu par le système de la part d'interactions externes, travail qui intervient dans la formulation du TEC "microscopique" (qui est bien le TEC que nous appliquons ici, cf suite). De plus,  $E_{c,\text{micro}}$  désigne ici l'énergie cinétique d'agitation thermique du gaz. Les travaux  $\delta W_{\text{int,micro}}$  des forces intérieures sont nuls si on modélise le gaz par un gaz parfait<sup>1</sup>. On a donc l'identification  $E_{c,\text{micro}} = U_{\text{gaz}}$  (cf note précédente).

★ **Bilan** : la comparaison des équations (1) et (2) montre que, dans le cas particulier ici étudié,

$$\boxed{W_{\text{ext du TEC}} = W_{\text{ext du 1er ppe}}} \quad (3)$$

## I.2 Échauffement isochore du gaz

Prenons maintenant un gaz dans une enceinte isochore, que l'on chauffe.

★ Avec le même type d'hypothèses que précédemment et en considérant le même système, le premier principe s'écrit :

$$dU_{\text{gaz}} = \delta Q \quad (4)$$

★ Et le théorème de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{dE_{c,\text{tot}}}_{=dE_{c,\text{micro}}} = \delta W_{\text{ext du TEC}} + \underbrace{\delta W_{\text{int,micro}}}_{=0} \quad (5)$$

En effet, on a encore  $\delta W_{\text{int,micro}} = 0$  dans le modèle du gaz parfait, et en l'absence de mouvement de l'enceinte on a bien  $dE_{c,\text{tot}} = dE_{c,\text{micro}}$ . D'autre part pour le gaz parfait,  $E_{c,\text{micro}} = U_{\text{gaz}}$ .

★ **Bilan** : la comparaison des équations (4) et (5) montre que, dans le cas particulier ici étudié,

$$\boxed{W_{\text{ext du TEC}} = Q} \quad (6)$$

1. De manière générale pour un gaz sans mouvement d'ensemble, l'énergie interne s'écrit  $U = E_{c,\text{micro}} + E_{p,\text{int,micro}}$ , avec  $E_{c,\text{micro}} \propto k_B T$  l'énergie cinétique d'agitation thermique, et  $E_{p,\text{int,micro}}$  l'énergie d'interaction entre les constituants. Dans le cadre du modèle du gaz parfait il n'y a pas d'interactions autres que des chocs ponctuels, donc  $E_{p,\text{int,micro}} = 0$ . Enfin, comme  $dE_{p,\text{int,micro}} = -\delta W_{\text{int,micro}}$ , le travail interne au gaz est nul également.

### I.3 Conclusion

Ce qui précède montre que le travail  $W_{\text{ext du TEC}}$  qui intervient dans le théorème de l'énergie cinétique n'est pas facile à définir. Il s'agit tantôt du travail qui apparaît dans le premier principe, tantôt du terme de transfert thermique du premier principe, et dans le cas général il s'agit des deux à la fois. Il en est de même pour la variation d'énergie cinétique  $E_{c,\text{tot}}$ , qui contient les contributions à la fois macroscopiques (ici si le piston se déplace) et microscopiques (l'agitation du gaz).

Tout ceci n'est pas surprenant si on réfléchit à l'origine de ce théorème, ce que nous ferons dans la partie suivante. En effet, le TEC doit considérer tous les travaux des actions externes au système, fussent-elles des actions macroscopiques (un opérateur pousse sur le piston) ou microscopiques (les particules de gaz gagnent en moyenne de l'énergie cinétique par interaction avec les parois chaudes, ou en perdent si elles sont froides, c'est-à-dire que les transferts thermiques sont inclus dans ce travail du TEC). Cette difficulté à donner une expression de  $W_{\text{ext du TEC}}$  (ou de  $E_{c,\text{tot}}$  et des travaux internes  $W_{\text{int,micro}}$ ), rend ce théorème peu utile dans un contexte thermodynamique.

Les pages qui suivent fournissent davantage de justifications. Notons que pour faire de la thermodynamique, cette suite n'est pas nécessaire : l'intérêt de cette théorie est justement de rendre inutile la description microscopique sur laquelle nous allons nous appuyer.

## II Démonstrations des deux TEC et du premier principe

### II.1 Rappel : énoncé du premier principe

Le premier principe de la thermodynamique s'énonce pour un système fermé, dans un référentiel galiléen, et peut s'écrire entre deux instants proches (pourvu que les grandeurs utilisées soient définies) :

$$dE_{c,\text{macro}} + dU = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta Q. \quad (7)$$

- $E_{c,\text{macro}}$  est l'énergie cinétique macroscopique, obtenue en sommant l'énergie cinétique mésoscopique locale (au sens d'un découpage mésoscopique ou en "particules de fluide") :

$$E_{c,\text{macro}} = \frac{1}{2} \iiint_V dm \vec{v}(M)^2.$$

On écrit parfois  $E_{c,\text{macro}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_{c,\text{macro}}^*$ , avec  $E_{c,\text{macro}}^*$  l'énergie cinétique évaluée dans le référentiel du centre de masse de l'ensemble (référentiel de vitesse  $\vec{v}_G$  par rapport au laboratoire,  $M$  étant la masse du système). Par exemple  $E_{c,\text{macro}}^* = I_{Gz} \omega^2 / 2$  pour un solide en rotation autour d'un axe  $Gz$  passant par son centre de masse,  $I_{Gz}$  étant le moment d'inertie par rapport à cet axe.

- $U$  est l'énergie interne du système. Postulat essentiel du premier principe, motivé par l'expérience :  **$U$  est une grandeur d'état**, c'est-à-dire que sa valeur est fixée par la connaissance d'un nombre restreint de grandeurs macroscopiques, soit trois pour les fluides simples dont au moins une extensive ( $U = U(T,p,N)$  par exemple). Il en résulte que la variation de  $U$  entre deux points fixés ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de l'état du système en ces deux points.

$U$  comprend tout ce qui n'est pas dans  $E_{c,\text{macro}}$  :

- La somme des énergies cinétiques de chaque volume mésoscopique évaluée dans le référentiel du centre de masse de chacun de ces volumes. On peut noter cette énergie cinétique  $E_{c,\text{micro}}$ . Elle comprend donc l'énergie cinétique microscopique liée à l'agitation thermique.
- L'énergie potentielle liée à des interactions microscopiques internes au système (interactions de Van der Waals, liaisons chimiques, nucléaires...).

S'il n'y a pas d'interactions à longue portée au sein du système (interaction gravitationnelle ou électrostatique entre corps macroscopiquement chargés), alors l'énergie interne est **additive** : elle est la somme des énergies internes massiques locales  $u(T,p)$  (grandeur intensive qui dépend de l'état local de la matière).  $U$  est alors aussi extensive.

S'il y a des interactions à longue portée au sein du système, on peut toujours les ajouter en dehors de  $U$ , comme un nouveau terme  $E_{p,\text{longue portée internes}}$  à gauche du premier principe (cf par exemple [1]), ce qui permet de conserver l'additivité de  $U$ .

- $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  est le travail reçu par le système de la part d'actions externes au système. Il peut s'agir de travail mécanique, électrique ou chimique.<sup>2</sup>

S'il y a des contributions de forces extérieures conservatives dans  $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$ , on peut toujours ensuite les placer dans un terme en  $dE_{p,\text{ext}}$  à gauche du signe égal, ce que nous ne ferons pas.

- $\delta Q$  est la chaleur ou le transfert thermique reçu. Par rapport à  $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$ , il s'agit du reste des transferts d'énergie, donc en fait  $\delta Q \stackrel{\text{def}}{=} dE_{c,\text{macro}} + dU - \delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  ([2, 10, 4, 8]).

## II.2 Démonstration du "TEC macroscopique"

### Définitions

On se place dans le cadre de la théorie de la mécanique des systèmes. On considère un ensemble de  $N$  entités (atomes ou molécules). On note  $m_i$  et  $\vec{v}_i$  la masse et la vitesse de chacune,  $M = \sum_i m_i$  la masse totale,  $\vec{v}_G$  la vitesse du centre de masse définie par  $M\vec{v}_G = \sum_i m_i\vec{v}_i$ .

On note  $\vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$  la force exercée par le milieu extérieur sur l'entité  $i$  (par exemple la gravité, ou l'action sporadique des parois lors de chocs), et  $\vec{f}_{j \rightarrow i}$  la force exercée par l'entité  $j$  sur l'entité  $i$  (c'est donc une force interne au système : par exemple pour un gaz interactions entre les molécules, de type Van der Waals). On pose  $\vec{f}_{i \rightarrow i} = \vec{0}$ .

La résultante des actions extérieures au système est  $\vec{f}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$ .

### Démonstration

Appliquons le principe fondamental de la dynamique (PFD) à une entité :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} + \sum_j \vec{f}_{j \rightarrow i}. \quad (8)$$

On somme ceci sur les  $N$  entités, et en utilisant la définition de  $\vec{v}_G$ , la définition de  $\vec{f}_{\text{ext}}$ , et le fait que  $\sum_{i,j} \vec{f}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$  (principe des actions réciproques<sup>3</sup>), on obtient :

$$\boxed{M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{f}_{\text{ext}}.} \quad (9)$$

On peut prendre le produit scalaire avec  $\vec{v}_G$  et intégrer :

$$\boxed{d \left( \frac{1}{2} M v_G^2 \right) = \vec{f}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_G dt.} \quad (10)$$

Nous obtenons ce que nous appelons le TEC macroscopique, qui est une relation exacte, valable pour un solide, un liquide, un gaz... dans laquelle le travail des forces intérieures n'apparaît pas. On l'a obtenue en prenant en quelque sorte le premier moment du PFD pour une entité.

Une autre formulation est possible, en utilisant le formalisme de la mécanique des milieux continus (qui s'applique donc pour un solide, liquide ou gaz). Il s'agit alors d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour une particule de fluide (l'équivalent du PFD, par exemple l'équation de Navier-Stokes), qui rend compte des interactions à une échelle mésoscopique, et comme ici de prendre son produit scalaire avec la vitesse de la particule de fluide. La démonstration est réalisée en annexe. On obtient alors :

$$\boxed{dE_{c,\text{macro}} = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta W_{\text{int,méso}}.} \quad (11)$$

2. Pour l'écriture générale du travail, voir par exemple [12] et [8, p. 59]. [...]

3. On a utilisé le fait que  $\sum_{i,j} \vec{f}_{j \rightarrow i} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j,i} \vec{f}_{j \rightarrow i} + \sum_{i,j} \vec{f}_{i \rightarrow j} \right) = \vec{0}$  (principe des actions réciproques :  $\vec{f}_{j \rightarrow i} + \vec{f}_{i \rightarrow j} = \vec{0}$ ).

## II.3 Démonstration du ‘‘TEC microscopique’’

### Définitions

– Énergie cinétique totale :

$$E_{c,\text{tot}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (12)$$

– Le travail des forces extérieures agissant sur l’ensemble du système pendant  $dt$  est <sup>4</sup> :

$$\delta W_{\text{ext du TEC micro}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} dt \quad (14)$$

$\delta W_{\text{ext du TEC micro}}$  est réellement le travail total exercé par les forces extérieures sur le système. C’est différent du terme  $\vec{v}_G \cdot \vec{f}_{\text{ext}} dt$  du TEC macroscopique. Il n’y a égalité que pour un solide indéformable en translation rectiligne (si  $\forall i, \vec{v}_i = \vec{v}_G$ ).

– Le travail des forces intérieures est :

$$\delta W_{\text{int,micro}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_i \vec{v}_i \cdot \sum_j \vec{f}_{j \rightarrow i} dt \quad (15)$$

### Démonstration

Appliquons cette fois-ci le TEC à l’entité  $i$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} + \sum_j \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{j \rightarrow i}. \quad (16)$$

Sommons ensuite ceci sur les  $N$  entités (donc en quelque sorte on prend cette fois le second moment). Avec les définitions ci-dessus on obtient le TEC microscopique, qui est celui que nous avons appliqué au gaz dans la partie introductive (I) :

$$\boxed{dE_{c,\text{tot}} = \delta W_{\text{ext du TEC micro}} + \delta W_{\text{int,micro}}.} \quad (17)$$

## II.4 ‘‘Démonstration’’ du premier principe à partir du ‘‘TEC microscopique’’

La démonstration est ici un peu plus longue à cause de la séparation des termes ‘‘microscopiques’’ ou ‘‘macroscopiques’’ (cf par exemple [7, §II.E]).

### Écriture de l’énergie cinétique

On décompose le système en  $K$  ‘‘particules de fluide’’ ou éléments mésoscopiques, chacun de masse  $M_k$ , d’énergie cinétique totale  $E_{c,k} = \sum_{i \in k} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ , de vitesse de centre de masse  $\vec{v}_{Gk}$ . On définit la vitesse locale relative  $\vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{v}_{Gk}$ . Le théorème de Koenig appliqué à chacun de ces volumes donne <sup>5</sup> :

$$E_{c,k} = \frac{1}{2} M_k v_{Gk}^2 + E_{c,k}^*, \quad \text{avec} \quad E_{c,k}^* = \sum_{i \in k} \frac{1}{2} m_i (v_i^*)^2. \quad (18)$$

4. Dans le cas d’un solide indéformable, on peut prendre un point  $A$  et écrire que  $\vec{v}_i = \vec{v}_A + \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{\omega}$  avec  $A_i$  la position de l’entité  $i$  et  $\vec{\omega}$  le vecteur rotation. On a alors

$$\delta W_{\text{ext}}/dt = \sum_i (\vec{v}_A + \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} = \vec{v}_A \cdot \vec{f}_{\text{ext}} + \left( \sum_i \overrightarrow{AA_i} \wedge \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} \right) \cdot \vec{\omega}, \quad (13)$$

moment en  $A$

ce qui est une formule bien connue (pour un solide indéformable donc sans agitation thermique). Si  $A$  est un point d’application de la force (où le moment est nul), alors  $\delta W_{\text{ext}}/dt = \vec{v}_A \cdot \vec{f}_{\text{ext}}$ .

5.  $m_i v_i^2 = m_i v_{Gk}^2 + 2m_i \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_{Gk} + m_i (v_i^*)^2$ , et  $\sum_{i \in k} m_i \vec{v}_i^* = \sum_{i \in k} m_i \vec{v}_i - \sum_{i \in k} m_i \vec{v}_{Gk} = \sum_{i \in k} m_i \vec{v}_i - M_k \vec{v}_{Gk} = \vec{0}$ .

$E_{c,k}^*$  est l'énergie cinétique barycentrique du volume  $k$ , le symbole  $*$  se référant à une grandeur évaluée dans le référentiel de la particule de fluide numéro  $k$  (référentiel de vitesse  $\vec{v}_{Gk}$  par rapport au laboratoire).

L'énergie cinétique totale du système s'écrit donc :

$$E_{c,\text{tot}} = \sum_{k=1}^K E_{c,k} = \underbrace{\sum_{k=1}^K \frac{1}{2} M_k v_{Gk}^2}_{\equiv E_{c,\text{macro}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^K E_{c,k}^*}_{E_{c,\text{micro}}}. \quad (19)$$

On peut s'arrêter ici dans la décomposition. Mais on peut aussi aller plus loin et faire apparaître l'énergie cinétique associée à la vitesse  $\vec{v}_G$  du centre de masse de l'ensemble du système. Pour cela, une seconde application du théorème de Koenig permet de décomposer le terme  $E_{c,\text{macro}}$  ci-dessus défini, et en utilisant le symbole  $\star$  pour une grandeur évaluée dans le référentiel du centre de masse de l'ensemble du système (référentiel de vitesse  $\vec{v}_G$  par rapport au laboratoire)<sup>6</sup> :

$$E_{c,\text{macro}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^K \frac{1}{2} M_k (v_{Gk}^*)^2}_{\equiv E_{c,\text{macro}}^*} \quad (20)$$

On aboutit donc à :

$$\boxed{E_{c,\text{tot}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_{c,\text{macro}}^* + E_{c,\text{micro}}.} \quad (21)$$

$E_{c,\text{micro}}$  et  $E_{c,\text{macro}}$  sont les mêmes termes que ceux décrit au §II.1 au sujet du premier principe. Chaque somme sur  $k$  peut s'écrire en version intégrale sur des volumes mésoscopiques :

$$E_{c,\text{macro}} = \frac{1}{2} \iiint_M dm \vec{v}(M)^2, \quad (22)$$

et :

$$E_{c,\text{micro}} = \iiint_M dm e_c^*(M), \quad (23)$$

somme des énergies cinétiques microscopiques dans le référentiel local du centre de masse de chaque volume. Ce terme  $E_{c,\text{micro}}$  sera inclus dans l'énergie interne  $U$ .

## Écriture des travaux

Il reste à traiter des travaux des forces internes. On suppose qu'ils dérivent d'une énergie potentielle<sup>7</sup>.

On découpe cette énergie potentielle d'interaction interne en une contribution à longue portée (si elle existe) et à courte portée. On se concentre sur cette dernière. On peut utiliser le découpage en volumes mésoscopiques (qui grâce à la courte portée n'interagissent pas entre eux) et l'écrire comme

$$E_{p,\text{int,micro}} = \sum_k E_{p,k} = \sum_{i,j \in k} E_p(M_i M_j) = \iiint dm e_{p,\text{int,micro}}(M). \quad (24)$$

C'est elle seule qu'on inclura dans  $U$ . Ainsi

$$\delta W_{\text{int,micro}} = -dE_{p,\text{int,micro}} - dE_{p,\text{longue portée internes}}. \quad (25)$$

6. Cette fois on décompose  $\vec{v}_{Gk} = \vec{v}_G + \vec{v}_{Gk}^*$  avec  $M\vec{v}_G = \sum_k M_k \vec{v}_{Gk}$ , puis on développe le carré comme pour le précédent théorème de Koenig. Notons que  $\vec{v}_G$  ainsi défini est le même que dans le reste de l'article car  $M\vec{v}_G = \sum_k M_k \vec{v}_{Gk} = \sum_k \sum_{i \in k} m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$ .

7. Ceci est toujours le cas. Les actions internes peuvent être décrites à une échelle microscopique, et à un niveau suffisamment microscopique toutes les interactions connues dérivent d'une énergie potentielle. Lire à ce propos Feynman [11, §14.4, [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I\\_14.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_14.html)], cité par [3]. Si ce n'était pas le cas l'énergie interne ne serait pas une grandeur d'état : sa variation sur un cycle ne serait pas nulle. Et l'énergie ne serait pas conservée : pour un système isolé ( $W_{\text{ext}} = Q = 0$ ) on aurait  $\Delta(E_c + U) = W_{\text{ext}} + Q + W_{\text{int,non conservatives}} \neq 0$ , en contradiction avec l'expérience.

Ceci n'est aucunement en conflit avec l'utilisation d'expressions de forces non conservatives en mécanique, lorsqu'elles sont décrites à des échelles non microscopiques (frottements, viscosité...).

## Mise ensemble

On part de l'expression (17) du TEC microscopique, et on exploite les écritures (21) et (25) ci-dessus :

$$dE_{c,macro} + dE_{p,longue\ portée\ internes} + \underbrace{dE_{c,micro} + dE_{p,int,micro}}_{\equiv dU} = \delta W_{\text{ext du TEC micro}}. \quad (26)$$

C'est l'énoncé du premier principe (§II.1). Il faut y ajouter que ce que l'on a appelé  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} dt$  dans le TEC va se décomposer *par hypothèse*, dans le 1<sup>er</sup> principe, en

$$\boxed{\delta W_{\text{ext du TEC micro}} = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta Q.} \quad (27)$$

La partition entre  $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  et  $\delta Q$  se décide comme indiqué au §II.1 :  $\delta Q$  représente les transferts d'énergie qui ne sont pas un travail externe (exprimable comme somme de  $y_{\text{ext}} dX$ , cf §II.1)<sup>8</sup>.

Cette partition de  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}}$  montre bien que le TEC microscopique ne fait pas la différence entre un apport d'énergie par un travail ou par un transfert thermique (ce dernier n'ayant pas de sens dans le cadre de la mécanique des systèmes). Du point de vue du TEC microscopique, seule compte la somme totale des  $\vec{v}_i \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i}$ , sans partition particulière entre ce qui proviendrait d'une action macroscopique (mouvement d'un piston, rotation d'un arbre) ou d'une action microscopique (interaction paroi-constituants). C'est tout le contraire dans le point de vue de la thermodynamique, qui justement se passe de la description microscopique, où cette différence de nature dans les apports d'énergie est cruciale pour le second principe et toutes les conséquences qui en découlent.

Notons enfin que nous n'avons pas réellement démontré le premier principe : nous n'avons pas prouvé que  $U$  est une grandeur d'état. Nous avons seulement fait le nécessaire pour élucider les liens entre premier principe et théorème de l'énergie cinétique.

## III Bilan

Résumons les trois équations principales et ajoutons quelques commentaires :

$$\boxed{\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}Mv_G^2\right) &= \vec{f}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_G dt && \text{(TEC macro, issu du PFD)} \\ dE_{c,macro} + dU &= \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta Q && \text{(1<sup>er</sup> principe)} \\ \underbrace{dE_{c,tot}}_{d\left(\frac{1}{2}Mv_G^2 + E_{c,macro}^*\right) + dE_{c,micro}} &= \underbrace{\delta W_{\text{ext du TEC micro}}}_{\delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta Q} + \underbrace{\delta W_{\text{int,micro}}}_{\text{va dans } dU} && \text{(TEC micro)} \end{aligned}} \quad (29)$$

Rappelons aussi la version ‘‘milieux continus’’, qui peut s'appliquer de manière très générale (cf annexe) :

$$\boxed{dE_{c,macro} = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta W_{\text{int,méso}} \quad \text{(TEC macro, issu du PFD à l'échelle méso)}} \quad (30)$$

- Le ‘‘TEC macroscopique’’ peut toujours être utilisé si on souhaite une information sur le mouvement d'ensemble du système. Il n'est pas équivalent au premier principe, et apporte donc une information supplémentaire.

Il résulte directement du PFD appliqué au système (en prenant le produit scalaire de ce PFD avec la vitesse du centre de masse  $\vec{v}_G$ ), et en cela est parfaitement rigoureux.

La puissance des forces intérieures n'y apparaît pas (grâce au principe des actions réciproques), ni l'énergie cinétique microscopique.

### Attention :

8. On peut tenter de comprendre cette partition aussi avec le point de vue mécanique : écrire pour cela

$$\delta W_{\text{ext du TEC micro}} = \sum_k \sum_{i \in k} \vec{v}_i \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} dt \stackrel{\vec{v}_i = \vec{v}_{Gk} + \vec{v}_i^*}{=} \sum_k \vec{v}_{Gk} \cdot \sum_{i \in k} \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} dt + \sum_k \sum_{i \in k} \vec{v}_i^* \cdot \vec{f}_{\text{ext} \rightarrow i} dt. \quad (28)$$

La première somme est une somme de travaux sur les éléments mésoscopiques. La seconde implique les vitesses microscopiques et peut donc provenir (mais pas uniquement) de ce qu'on nommerait un transfert thermique en thermodynamique, par exemple de la part des parois chaudes.

- Le terme de droite n’est pas la puissance des forces agissant sur le système.

La puissance d’une action mécanique de torseur  $\{\vec{f}_{\text{ext}}, \vec{\Gamma}_A\}$  sur un système s’écrit en prenant une intégrale sur le système et n’admet en général pas d’expression simple. Un cas particulier est le solide indéformable, et alors  $\mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext}}) = \vec{f}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_A + \vec{\Gamma}_A \cdot \vec{\omega}$ , ou simplement  $\mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext}}) = \vec{f}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_A$  si  $A$  est un point d’application de la force (où  $\vec{\Gamma}_A = \vec{0}$ ).

Ici ce n’est pas ça : la démonstration à partir du PFD mène invariablement à  $\vec{f}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_G$  où  $G$  est le centre de masse, quel que soit le point d’application de la force (cf l’exemple du gaz comprimé au §I).

Pour éviter les confusions, ce terme  $\vec{f}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_G dt$  est appelé **pseudo-travail** par certains auteurs (entre autres [3]), et notre TEC macroscopique se nomme “l’équation du pseudo-travail”. Pour ne pas se tromper, *mieux vaut à chaque fois partir du PFD appliqué au système.*

- Dans sa version de l’équation (30), le TEC macroscopique s’applique également toujours, en complément du premier principe. Cette fois, les termes  $E_{c,\text{macro}}$  et  $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  y sont les mêmes.  $\delta W_{\text{int,méso}}$  résulte d’actions internes décrites à une échelle mésoscopique.
- Le “TEC microscopique” est obtenu en sommant les TEC appliqués à chaque entité microscopique.

### Attention :

- Le travail  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}}$  apparaissant dans le TEC microscopique n’est pas le même que celui du premier principe : on a  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}} = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta Q$ .

On peut déterminer l’expression de  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}}$  dans certains cas simples seulement. Par exemple dans le cas d’un solide en translation soumis à une action de résultante  $\vec{f}_{\text{ext}}$ , on a  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}} = \vec{v}_G \cdot \vec{f}_{\text{ext}} dt = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$ . Ou encore dans le cas d’un gaz parfait (cf §I) on peut avoir  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}} = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  dans des conditions adiabatiques ou  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}} = \delta Q$  dans des conditions isochores.

Mais de manière générale il est très difficile (voire souvent impossible) d’exprimer  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}}$  (et d’ailleurs de même pour  $\delta W_{\text{int,micro}}$ ).

- L’énergie cinétique  $dE_{c,\text{tot}} = dE_{c,\text{macro}} + dE_{c,\text{micro}}$  du TEC microscopique (avec on le rappelle l’éventuelle décomposition  $E_{c,\text{macro}} = Mv_G^2/2 + E_{c,\text{macro}}^*$ ) n’est pas la même que celle intervenant dans le premier principe (qui est uniquement  $dE_{c,\text{macro}}$ ).

Dans le premier principe les choses sont plus simples puisque la contribution  $dE_{c,\text{micro}}$  est contenue dans  $dU$ .

- Le TEC microscopique et le premier principe sont équivalents et il ne faut donc pas espérer en apprendre davantage en appliquant les deux conjointement<sup>9</sup>.

L’utilisation du premier principe dans le cadre de la thermodynamique est plus puissante, car le formalisme thermodynamique se passe de la description microscopique des phénomènes. Le premier principe postule de plus que l’énergie interne est une grandeur d’état, ce qui n’est pas démontré par l’approche mécanique.

## IV Trois exemples

---

Terminons par trois exemples. Le premier et le second montrent comment l’utilisation du premier principe et du TEC macroscopique (ou en fait du PFD appliqué au système) peut aider à résoudre un problème. Le dernier considère un système en régime stationnaire et montre que les travaux internes sont nuls.

### IV.1 Cube glissant sur un support

On considère un cube de masse  $M$  posé sur un support horizontal de masse très supérieure. On donne au cube une vitesse initiale  $V_0$ , puis on le laisse évoluer librement. On suppose que les frottements

<sup>9</sup>. La seule utilité serait pour obtenir a posteriori une expression de  $\delta W_{\text{int,micro}}$ , dans des cas où  $\delta W_{\text{ext du TEC micro}}$  et  $dE_{c,\text{tot}}$  sont facilement identifiables. Cf §IV.3

entre le cube et le support sont de type solide : la norme  $F$  de la résultante s'écrit  $F = \mu Mg$  et est constante. On note  $L$  la distance parcourue par le cube avant qu'il ne s'arrête.

Le PFD au système {cube} s'écrit  $M \frac{dV}{dt} = -F$ , soit après multiplication par la vitesse  $V$  du centre de masse du cube :

$$\frac{dE_c}{dt} = -FV, \text{ avec } E_c = \frac{1}{2}MV^2, \quad (31)$$

qui s'intègre en

$$\frac{dE_c}{dt} = -F \frac{dx_{\text{cube}}}{dt} \Rightarrow \Delta E_c = W(\vec{F}) = -\mu MgL, \quad (32)$$

ce qui est le "TEC macroscopique"<sup>10</sup>. Ceci permet de déterminer l'avancée  $L$  du cube :  $L = \frac{V_0^2}{2\mu g}$ .

On peut ensuite appliquer le premier principe à l'ensemble {support+cube}, supposé assez grand pour être isolé :

$$\Delta E_c + \Delta U_{\text{cube}} + \Delta U_{\text{support}} = 0, \quad (33)$$

soit :

$$C_{p,\text{cube}}\Delta T_{\text{cube}} + C_{p,\text{support}}\Delta T_{\text{support}} = -\Delta E_c = \frac{1}{2}MV_0^2. \quad (34)$$

La répartition de l'augmentation de température entre cube et support dépend ensuite des conductivités thermiques respectives, de l'état des supports, etc., et ne peut pas s'obtenir par nos raisonnements globaux<sup>11</sup>.

## IV.2 Fluide en écoulement dans une conduite

Cet exemple est très bien traité dans l'article de S. Olivier [9], qui utilise à la fois le premier principe et le PFD appliqué au système. Nous ne reprenons donc pas cette démonstration ici.

## IV.3 Système en régime stationnaire

En régime stationnaire tous les termes en  $d$  sont nuls, donc des équations (29) on déduit que  $\delta W_{\text{int,micro}} = 0$ . Ceci se retrouve également en écrivant que  $\delta W_{\text{int,micro}} = -dE_{p,\text{int,micro}}$  (cf note de bas de page p. 6), différentielle exacte donc nulle en régime stationnaire.

Ce résultat mérite quelques commentaires. Prenons une expérience de type Joule, où on remue un liquide visqueux contenu dans une enceinte. Supposons le régime stationnaire atteint : la chaleur produite par le remuage est exactement évacuée par les parois.

Le premier principe au système {fluide+enceinte+dispositif de remuage} s'écrit :

$$0 = \delta W_{\text{ext du 1er ppe}} + \delta Q, \quad (35)$$

donc le travail mécanique fourni (du type couple  $\times$  vitesse angulaire de l'axe qui actionne le mélangeur) est évacué en chaleur ( $-\delta Q$ ), ce qui était attendu. Ce sont les actions internes de viscosité qui sont responsables de cette conversion. Mais leur travail évalué à l'échelle microscopique est nul :  $\delta W_{\text{int,micro}} = -dE_{p,\text{int,micro}} = 0$ , car l'état du fluide reste le même au cours du temps<sup>12</sup>.

10. Cette approche par le PFD est claire et plus convaincante qu'une application du TEC (sans préciser de quelle version il s'agit) dans laquelle on ne sait que faire de  $W_{\text{int,micro}}$  : il est nul si solide indéformable, mais dans ce cas un solide indéformable ne s'échauffe pas ?

11. Beaucoup d'encre a coulé dans le BUP et ailleurs au sujet de ce problème [3, 12, 5, 6, 2]. Il me semble que le plus raisonnable est d'en rester au raisonnement que nous venons de mener, qui porte sur le système global, pour lequel les échanges et leur nature sont clairement spécifiés. On peut d'ailleurs aussi réaliser simplement un bilan entropique. Aller plus loin en appliquant les principes au {cube} ou au {support} impose de considérer des systèmes dont les frontières et les échanges aux frontières sont difficiles à déterminer (il faut notamment définir une interface entre cube et support).

12. Notons d'ailleurs que si  $\delta W_{\text{int,micro}}$  était non nul, on aurait création ou destruction d'énergie, puisqu'au niveau des échanges externes on a déjà parfaite compensation de  $\delta W_{\text{ext du 1er ppe}}$  et de  $-\delta Q$ .

C'est bien sûr différent en régime non stationnaire : l'état du fluide change au cours du temps et donc  $E_{p,\text{int,micro}}$  peut varier.

Ce système stationnaire peut être vu comme une machine à convertir du travail mécanique en chaleur, par l'intermédiaire d'interactions microscopiques entre entités élémentaires. Ces interactions dérivent d'une énergie potentielle et, comme l'état du fluide reste macroscopiquement le même, cette énergie potentielle reste constante et il n'y a pas de travail interne.

Nous reviendrons sur cet exemple dans l'annexe page 13, en montrant que les actions internes de viscosité travaillent bien à l'échelle mésoscopique :  $\delta W_{\text{int,micro}} = 0$ , mais  $\delta W_{\text{int,méso}}$  non nul et négatif, et c'est ce dernier qui est usuellement évalué dans les exercices.

## Conclusion

---

Cet article a permis d'explorer les liens entre théorème de l'énergie cinétique et premier principe. En particulier nous avons vu qu'il est rarement utile ou possible d'appliquer le premier principe et le TEC à l'échelle microscopique conjointement, d'abord car ils sont formellement équivalents et donc redondants, et ensuite car l'énergie cinétique et le travail qui y interviennent ne sont en général pas les mêmes et sont difficilement exprimables pour le TEC microscopique.

## V Annexe : autre choix de définition de $U$

---

La définition de  $U$  donnée dans l'article n'est pas la seule possible (voir [3] pour une discussion). On peut aussi choisir d'inclure dans  $U$  l'énergie cinétique macroscopique barycentrique et/ou les énergies potentielles d'interaction à longue portée (gravitationnelle, électrostatique). Il ne reste alors, en dehors de  $U$ , que le terme  $Mv_G^2/2$ .

Mais le choix fait dans l'article est plus pratique dès lors qu'il faut exprimer l'énergie interne comme somme locale via l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, car seul ce choix mène à une définition locale et additive de l'énergie interne : on peut en effet écrire

$$U = \sum_k U_k = \iiint_M u(M) dm \quad (36)$$

avec  $U_k = E_{c,k}^* + E_{p,k}$ , et  $u(M) = e_c^*(M) + e_{p,\text{int,micro}}(M)$  l'énergie interne massique locale au point  $M$ , qui est l'énergie interne dans le référentiel de la particule de fluide en  $M$ .

## VI Annexe : le TEC macroscopique en mécanique des milieux continus

### VI.1 Introduction et conservation de la quantité de mouvement

On considère un fluide (liquide ou gaz) ou un solide, décrit à une échelle mésoscopique par sa masse volumique  $\rho(\vec{x},t)$ , le champ de vitesses  $\vec{v}(\vec{x},t)$ , et le tenseur de contraintes  $\tau_{ij}(\vec{x},t)$ . Ce dernier est symétrique et s'interprète ainsi : la force surfacique s'exerçant sur une surface de fluide de normale  $\vec{n}$  est  $\vec{f}$ , de composante  $f_j = \tau_{ij}n_i$  (ici et dans la suite on somme implicitement sur les indices répétés). On note  $\vec{g}$  la pesanteur<sup>13</sup> Nous suivons en grande partie les démonstrations de l'ouvrage [13], disponible en ligne<sup>14</sup>.

Un bilan de masse, puis un bilan de quantité de mouvement, permettent d'aboutir aux équations suivantes [13, §6.2, §6.3] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (39)$$

$$\rho \frac{Dv_j}{Dt} = \rho g_j + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}. \quad (40)$$

Dans la suite on posera  $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$  avec  $p$  la pression et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.

Dans le cas particulier d'un fluide newtonien,  $\sigma_{ij}$  s'exprime simplement et on aboutit à [13, §6.3] :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad (41)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique usuelle et  $\lambda$  la seconde viscosité. C'est l'équation de Navier-Stokes.

### VI.2 Vers une équation de conservation de l'énergie

Nous sommes intéressé par une équation de conservation de l'énergie. Pour l'obtenir, nous procédons de la même manière que lorsqu'on avait pris le produit scalaire du PFD appliqué au système par la vitesse du centre de masse du système, ce qui avait donné le TEC "macroscopique" (l'équation 10). Mais ici nous nous plaçons à une échelle mésoscopique, en prenant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (qui est issue d'un bilan mésoscopique sur une particule de fluide) par la vitesse locale  $\vec{v}$  (vitesse mésoscopique également, ou vitesse des particules de fluide). Nous allons obtenir en quelque sorte un TEC "mésoscopique". Soit donc :

$$\underbrace{\rho v_j \frac{Dv_j}{Dt}}_a = \underbrace{\rho g_j v_j}_b + \underbrace{v_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}}_c. \quad (42)$$

On note  $V(t)$  le volume d'une particule de fluide, suivie dans son mouvement, sur lequel nous allons intégrer cette équation.

13. On utilisera les définitions ou identités suivantes, pour toute grandeur  $\chi$  ou tenseur symétrique  $T_{ij}$  :

– La notation de la dérivée totale :  $\frac{D\chi}{Dt} \equiv \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \chi$ .

– Le théorème suivant (qui utilise l'équation de conservation de la masse, cf [13, §6.3.3]), dans lequel  $V(t)$  est le volume d'une particule de fluide suivie dans son mouvement :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \chi dV = \iiint_{V(t)} \rho \frac{D\chi}{Dt} dV. \quad (37)$$

– Le théorème de la divergence (où  $V(t)$  est un volume et  $A(t)$  sa surface, qui peuvent dépendre ou non de  $t$ ) :

$$\oiint_{A(t)} T_{ij} n_i dS = \iiint_{V(t)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dV. \quad (38)$$

14. [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil\\_Engineering/Book%3A\\_All\\_Things\\_Flow\\_-\\_Fluid\\_Mechanics\\_for\\_the\\_Natural\\_Sciences\\_\(Smyth\)](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Civil_Engineering/Book%3A_All_Things_Flow_-_Fluid_Mechanics_for_the_Natural_Sciences_(Smyth))

$$- a = \rho \frac{Dv_j v_j / 2}{Dt} \text{ et par (37) : } \iiint_{V(t)} \frac{\rho}{2} \frac{Dv_j v_j}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho \frac{v_j v_j}{2} dV.$$

Ainsi, l'intégrale volumique du terme  $a$  donne la variation d'énergie cinétique calculée en sommant à une échelle mésoscopique. C'est ce que nous avons noté  $E_{c,macro}$  dans le reste de l'article.

- L'intégrale volumique du terme  $b$  donne la puissance des forces de pesanteur.

Quelques manipulations permettent aussi de l'écrire comme  $\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho g z dV$  (axe  $z$  vers le haut).

-  $c = \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j \tau_{ij}) - \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j \tau_{ij}) + p \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ . Le terme avec  $p$  s'écrit aussi  $p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ . On intègre sur le volume, en transformant le premier terme grâce à (38) :

$$\iiint_{V(t)} c dV = \oint_{A(t)} \underbrace{v_j \tau_{ij} n_i}_{=\vec{v} \cdot \vec{f}} dS + \iiint_{V(t)} p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV - \iiint_{V(t)} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV. \quad (43)$$

L'intégrale surfacique s'identifie comme la puissance des forces surfaciques extérieures agissant sur la particule de fluide, calculé à une échelle mésoscopique.

On obtient donc :

$$\frac{DE_{c,macro}}{Dt} = \mathcal{P}_{\text{ext,pesanteur}} + \mathcal{P}_{\text{ext,surfacique}} + \iiint_{V(t)} p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV - \iiint_{V(t)} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV. \quad (44)$$

Pour faire le lien avec le reste de l'article, on choisit plutôt un volume  $V(t)$  fixe, par exemple le volume complet du récipient qui contient le fluide. La dérivée totale devient une simple dérivée. On a alors :

$$dE_{c,macro} = \underbrace{\delta W_{\text{ext,pesanteur}} + \delta W_{\text{ext,surfacique}}}_{\delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}}} + dt \underbrace{\iiint_V p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) dV - \iiint_{V(t)} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dV}_{\equiv \delta W_{\text{int,méso}}}. \quad (45)$$

On a noté  $\delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}}$  la somme des travaux des forces externes car c'est précisément la même chose que celui défini pour le premier principe. Quant à  $\delta W_{\text{int,méso}}$ , il s'agit du travail des actions internes (calcul via une intégrale volumique). Il a deux contributions :

- Le premier terme est le travail des forces de pression, non nul dans le cas d'un fluide compressible. Une détente ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$ ) fait augmenter l'énergie cinétique macroscopique du fluide (penser à un gaz), et vice versa pour une compression.
- Le second est lié au travail (interne) des actions de contact entre volumes mésoscopiques (hors pression normale). Cette écriture est valable pour tout milieu continu (fluide ou solide). Dans un fluide, il s'agit d'actions visqueuses.

Dans le cas particulier d'un fluide newtonien, on a [13, §6.4] :  $\sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 2\mu e_{ij} e_{ij} + \lambda e_{kk}^2 > 0$  (où  $e_{ij} = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2$ ), toujours positif donc ce terme entraîne toujours une diminution de l'énergie cinétique macroscopique.

Par exemple si  $\vec{v} = v_x(y,t)\vec{e}_x$ , il ne reste que  $\sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$ , puissance volumique dissipée par viscosité.

Ces forces de viscosité sont ici évaluées à une échelle mésoscopique (action sur les parois d'une particule de fluide). De manière plus générale, le tenseur des contraintes est l'expression mésoscopique de forces microscopiques entre molécules. C'est la différence avec une évaluation à l'échelle microscopique utilisée dans le TEC "micro" (équation 17). En régime permanent,  $\delta W_{\text{int,micro}} = 0$ , mais ce n'est pas nécessairement le cas à une échelle non microscopique. C'est la même situation paradoxale avec toute force non conservative à l'échelle méso ou macroscopique : à l'échelle microscopique, les interactions ne sont que conservatives.

Ajoutons enfin qu'en mécanique des fluides, la viscosité  $\lambda$  n'est pas nécessairement la viscosité propre du fluide, mais peut être aussi une viscosité effective qui rend compte de la dissipation turbulente.

Notons bien que le transfert thermique ou l'énergie interne n'interviennent pas dans cette équation (45). Si on souhaite les faire intervenir, il faut appliquer un premier principe à une particule de fluide [13, §6.4]. Son intégration sur tout le volume redonne alors sans surprise exactement le premier principe de la relation 29.

### VI.3 Exemple : retour sur l'expérience de Joule

★ Revenons sur l'expérience de Joule du paragraphe IV.3. On a donc, pour le système {fluide+enceinte+dispositif de remuage} :

$$\begin{aligned} dE_{c,macro} &= \delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}} + \delta W_{\text{int,méso}} && \text{(TEC macro)} \\ dE_{c,macro} + dU &= \delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}} + \delta Q && \text{(1}^{\text{er}} \text{ principe)} \end{aligned} \quad (46)$$

En régime stationnaire, les termes de gauche sont nuls. Notons  $\delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}} = C\omega dt$  (avec  $C$  le couple exercé sur l'arbre et  $\omega$  sa vitesse angulaire). On a donc :

$$\delta Q = -C\omega dt = \delta W_{\text{int,méso}} < 0.$$

★ Pour rappel, l'utilisation du TEC microscopique,

$$dE_{c,macro} + dE_{c,micro} = \underbrace{\delta W_{\text{ext du TEC micro}}}_{\delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}} + \delta Q} + \delta W_{\text{int,micro}} \quad \text{(TEC micro)}, \quad (47)$$

donnait  $\delta W_{\text{int,micro}} = 0$ . Ceci n'est pas contradictoire : les frottements ou les actions de viscosité sont non conservatifs à l'échelle méso ou macroscopique, mais résultent d'interactions microscopiques conservatives entre constituants.

### VI.4 Autre exemple : chauffage par transfert thermique

Étudions enfin le chauffage d'un volume d'eau dans une bouilloire. On considère le système {eau}. Ici, nous négligeons tout travail des forces de pression, et il ne reste pour  $\delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}}$  que le travail des forces de pesanteur :  $\delta W_{\text{ext du 1}^{\text{er}} \text{ ppe}} = -dE_{p,pes}$  (pertinent s'il y a des mouvements de convection qui redistribuent les zones plus ou moins denses). On néglige les contributions de viscosité et de compressibilité dans le travail des forces internes : (45) montre alors que  $\delta W_{\text{int,méso}} = 0$ . Il reste :

$$\begin{aligned} dE_{c,macro} + dE_{p,pes} &= 0 && \text{(TEC macro)} \\ dE_{c,macro} + dE_{p,pes} + dU &= \delta Q && \text{(1}^{\text{er}} \text{ principe)} \end{aligned} \quad (48)$$

La seconde équation se résume donc à  $dU = \delta Q$  : la chaleur apportée par chauffage fait augmenter l'énergie interne de l'eau, et donc sa température. Le chauffage se faisant par le bas,  $T$  augmente d'abord en bas. La masse volumique à cet endroit diminue, et donc  $E_{p,pes}$  également. La première équation montre alors que  $E_{c,macro}$  doit augmenter : des mouvements de convection prennent place et redistribuent la répartition de masse volumique.

## Références

---

- [1] R. Balian. Pourquoi le Soleil n'explose pas, ou les bienfaits d'une chaleur spécifique négative. Reflets de la Physique, 10 :14–15, 2008.
- [2] J.-P. Barrat. Remarques sur les bases de la thermodynamique. Bull. Un. Phys., 724(1) :675, 1990.
- [3] H. Besson. Bilans énergétiques : une mise au point conceptuelle. Bull. Un. Phys., 812 :383, 1999.
- [4] H. B. Callen. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics. 1985.
- [5] L. Dettwiller. Création de chaleur et échanges énergétiques : I. Application à l'étude thermodynamique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet JOULE. Bull. Un. Phys., 775(1), June 1995.
- [6] L. Dettwiller. Création de chaleur et échanges énergétiques : II. Applications à l'analyse entropique du contact de deux solides avec frottement et de l'effet JOULE. Bull. Un. Phys., 775(2), June 1995.
- [7] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. Physique statistique. Hermann, 2001.
- [8] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. Thermodynamique. Hermann, 2007.
- [9] S. Olivier. Retour sur l'identité thermodynamique fondamentale. Bull. Un. Phys., 884, May 2006.
- [10] O. Pujol. Commentaires sur le terme "transfert thermique" en thermodynamique. Bull. Un. Phys., 1004 :695–701, May 2019.
- [11] R. P. Feynman. Feynman Lectures on physics. , 1963.
- [12] P. Roux and J.-R. Seigne. L'énergie en mécanique et en thermodynamique. Bull. Un. Phys., 832 :491, 2001.
- [13] B. Smyth. All Things Flow - Fluid Mechanics for the Natural Sciences. 2022.