

I Comparaison des deux modèles et influence de la tige

I.1 Remarques sur le protocole

- ▶ On équilibre la tige : on place tout au bout l'ailette en plastique jaune (qui sert usuellement à créer des frottements), et on ajuste la position de la tige pour que son centre de gravité coïncide avec l'axe du pendule.

Conséquence : le moment selon Oz du poids agissant sur la tige est nul, $\Gamma_{Oz}(\vec{P}_{\text{tige}}) = 0$.

- ▶ On met le pendule de niveau.
- ▶ On fera varier la distance L entre le centre de masse de la masse et l'axe Oz . On a des variations entre $L = 10$ cm et 47 cm.

On mesure L avec une règle métallique, en la plaquant sur la masse et en ajoutant donc la demi-hauteur de la masse (c'est un cylindre de demi-hauteur 0.85 cm).

Incertitude à 95% sur L de l'ordre de $\Delta L = 2$ mm. Donc incertitude-type $u(L) = 1$ mm rentrée sur Regressi.

- ▶ Masse métallique pesée sur la balance : $M = 193,4$ g. Incertitude négligeable.
(on peut ne pas la peser, on détermine alors des grandeurs comme J_t/M)
- ▶ On mesure la période des oscillations (oscillations pas trop grandes) sur Latis Pro, sur une dizaine de périodes, avec les mesures automatiques.
Incertitude négligeable par rapport à celle sur L (donc prise nulle).

I.2 Remarques sur la théorie

Soit J_t le moment d'inertie de l'ensemble {tige+ailette} (qui n'a pas d'expression simple ; ce n'est pas celui de la tige seule (qui serait $mL_{\text{tige}}^2/3$ si accrochée à une extrémité)).

Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe Oz est :

$$J_{\text{tot}} = \underbrace{J^* + ML^2}_{\text{contribution masse M}} + \underbrace{J_t}_{\text{contribution tige}}. \quad (1)$$

J^* est le moment d'inertie barycentrique de la masse. Pour un cylindre de hauteur $h = 1,9$ cm et de rayon $R = ?$, on a $J^* = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$. Pour simplifier on néglige J^* dans toute la suite (en fait pas vraiment : il est compris dans J_t).

On applique le TMC. Le moment du poids sur la masse est $-MgL \sin \theta$ (pas d'approximation particulière), et celui sur la tige est nul (tige équilibrée) :

$$(J_t + ML^2)\ddot{\theta} = -MgL \sin \theta. \quad (2)$$

(Si on n'avait pas équilibré la tige, il y aurait eu un terme supplémentaire à droite, du type $-m_{\text{tige}}g OG_{\text{tige}} \sin \theta$ qui complique l'analyse et empêche de faire des régressions linéaires.)

On utilise $\sin \theta \simeq \theta$. Pulsation propre et période :

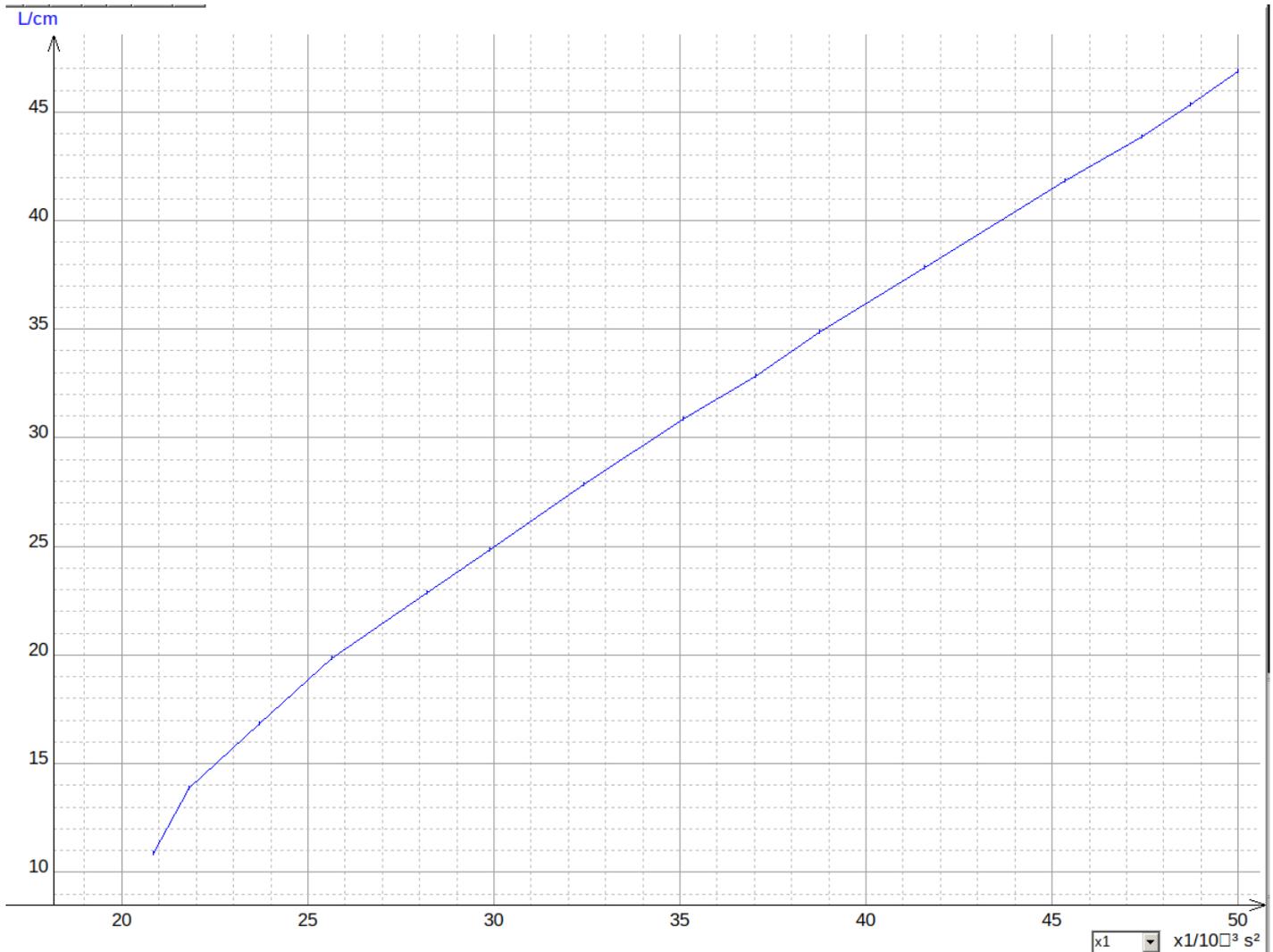
$$\omega_0^2 = \frac{MgL}{J_t + ML^2} \quad \text{et donc} \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{J_t + ML^2}{MgL}. \quad (3)$$

I.3 Test du modèle du pendule simple (ponctuel)

On néglige J_t . Alors $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L}{g}$, soit

$$l = g \times \underbrace{\frac{T^2}{4\pi^2}}_{\equiv x}$$

Les données (tracé de L en fonction de x) :

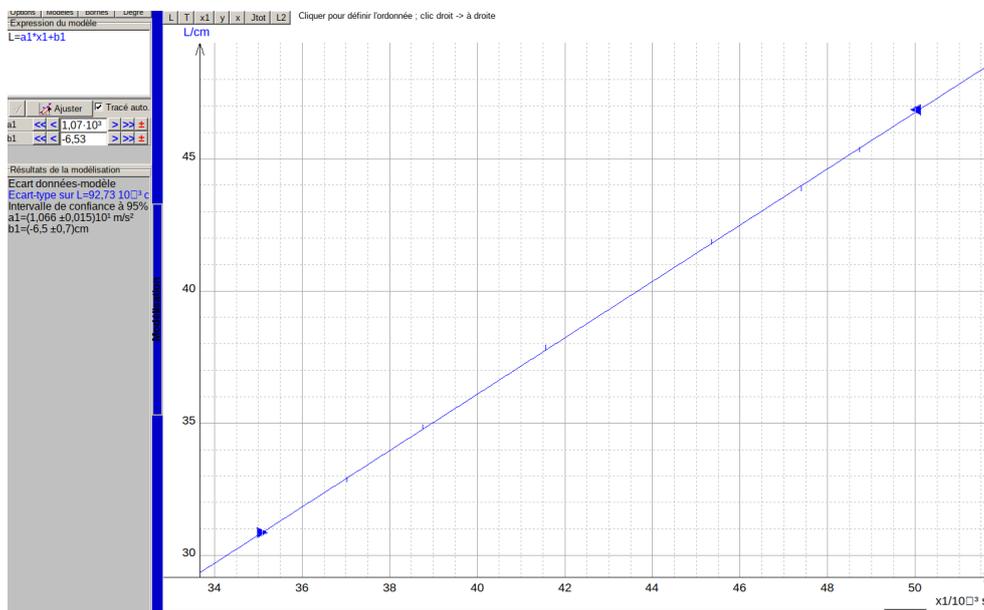


Bilan : échec, la loi n'est pas valide.

Remarque : On peut aussi tester en se restreignant à des L élevés (masse assez loin de l'axe Oz), cf ci-dessous pour les L supérieurs à 30 cm. Les points sont bien alignés, mais on a une ordonnée à l'origine non compatible avec la valeur 0 ($b = (-6,5 \pm 0,7)$ cm (incertitude à 95%), et pour la pente on obtient (incertitude à 95%)

$$g = (10,6 \pm 0,2) \text{ m/s}^2,$$

ce qui montre qu'il y a un problème.

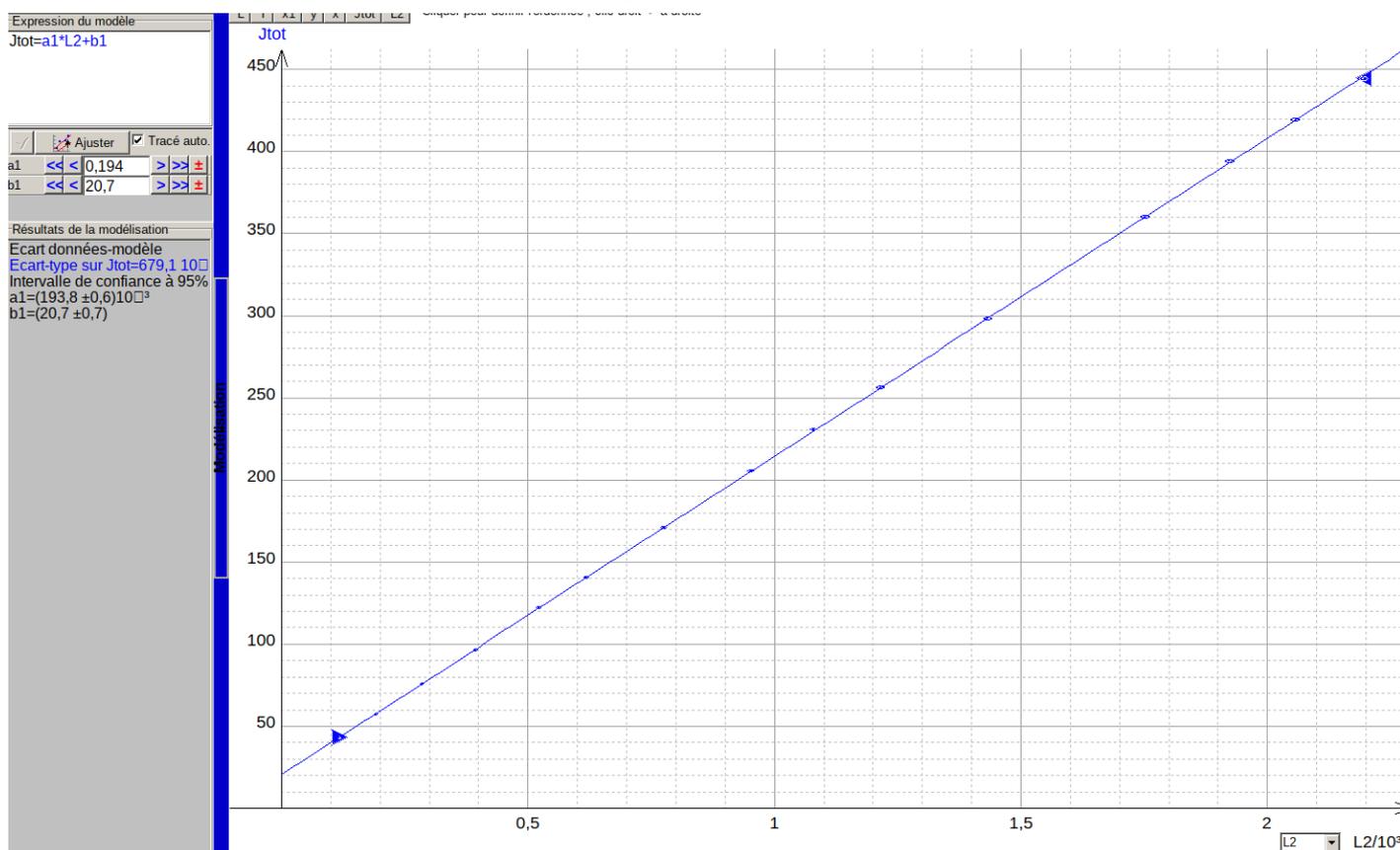


I.4 Test du modèle du pendule pesant (prise en compte de la tige)

On prend en compte J_t . On utilise $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, et on s'intéresse au moment d'inertie total.

Théoriquement on a $J_{\text{tot}} = J_t + ML^2$.

Expérimentalement on mesure J_{tot} via $J_{\text{tot}} = \frac{T^2 MgL}{4\pi^2}$, qu'on va donc tracer en fonction de $x = L^2$.



Bilan : excellent accord.

On obtient :

$$J_t = (20,7 \pm 0,7) \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

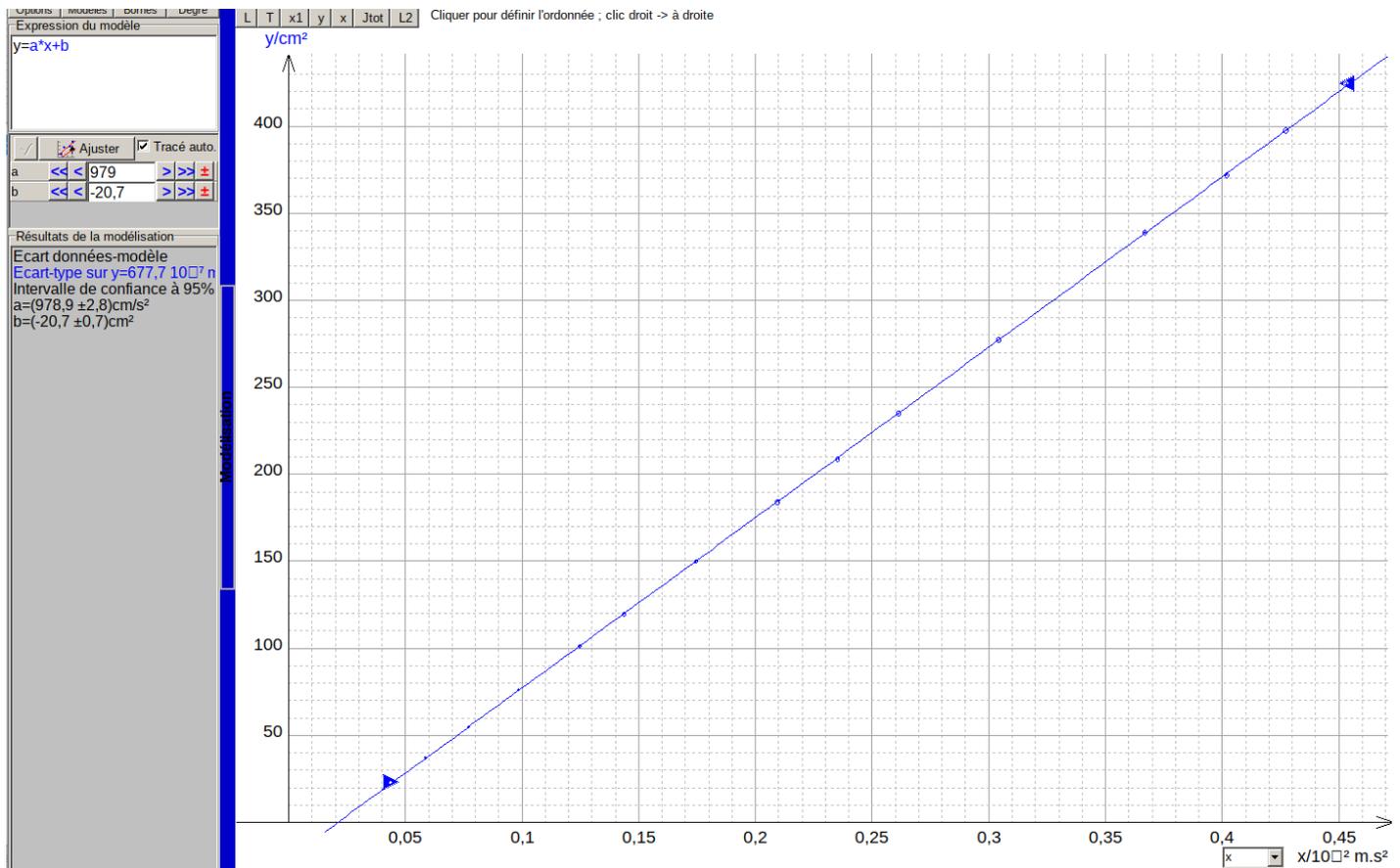
La pente est en accord avec la masse (193,4 g sur la balance) :

$$M = (193,8 \pm 0,6) \text{ g}.$$

1.5 Complément : une autre vérification du modèle du pendule pesant avec mesure de g

On prend encore en compte J_t . Avec quelques manipulations on réécrit la loi sous la forme suivante :

$$y = g x - J_t, \quad \text{avec} \quad y = ML^2 \quad \text{et} \quad x = \frac{MLT^2}{4\pi^2}.$$



Bilan : fit parfait sur pour L allant de 10 cm à 47 cm. Un point aberrant à 7 cm a été retiré (mauvaise mesure?). On obtient (incertitude à 95%) :

$$g = (9,79 \pm 0,03) \text{ m/s}^2,$$

compatible avec la valeur de 9,81, avec une incertitude relative de $0,03/9,79 = 0,3\%$, ce qui est tout de même remarquable! (tout comme l'alignement des points d'ailleurs...)

À ce niveau d'incertitude, on peut penser que commencent à entrer en jeu des choses comme l'horizontalité du pendule, les écarts à $\sin \theta = \theta$, l'équilibrage de la tige non parfait, etc...

La non ponctualité de la masse n'est pas un problème : en fait on a déterminé non pas J_t , mais $J_t + J^*$.

On obtient aussi le moment d'inertie du système {tige+ailette} :

$$J_t = (20,7 \pm 0,7) \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

Remarque : on peut éviter d'utiliser la balance pour obtenir la masse M (ce qui n'est pas très élégant car la balance utilise déjà g pour en déduire M ...) en divisant la relation par m . La pente est encore g , et l'ordonnée à l'origine est J_t/M . Toutefois ça ne change rien à la valeur de g trouvée.

I.6 Les données

i	L	u(L)	T	u(T)	x1	u(x1)	y	u(y)	x	u(x)	Jtot	u(Jtot)	L2	u(L2)
0	10,85	0,10	0,9070	0,0000000	0,02084	0,0000000	22,77	0,42	0,04373	0,00040	42,90	0,40	117,7	2,2
1	13,85	0,10	0,9280	0,0000000	0,02181	0,0000000	37,10	0,54	0,05843	0,00042	57,32	0,41	191,8	2,8
2	16,85	0,10	0,9670	0,0000000	0,02369	0,0000000	54,91	0,65	0,07719	0,00046	75,72	0,45	283,9	3,4
3	19,85	0,10	1,006	0,0000000	0,02564	0,0000000	76,20	0,77	0,09841	0,00050	96,54	0,49	394,0	4,0
4	22,85	0,10	1,055	0,0000000	0,02819	0,0000000	101,0	0,88	0,1246	0,00055	122,2	0,53	522,1	4,6
5	24,85	0,10	1,086	0,0000000	0,02987	0,0000000	119,4	0,96	0,1436	0,00058	140,8	0,57	617,5	5,0
6	27,85	0,10	1,131	0,0000000	0,0324	0,0000000	150,0	1,1	0,1745	0,00063	171,2	0,61	775,6	5,6
7	30,85	0,10	1,177	0,0000000	0,03509	0,0000000	184,1	1,2	0,2094	0,00068	205,4	0,67	951,7	6,2
8	32,85	0,10	1,209	0,0000000	0,03702	0,0000000	208,7	1,3	0,2352	0,00072	230,8	0,70	1079	6,6
9	34,85	0,10	1,237	0,0000000	0,03876	0,0000000	234,9	1,3	0,2612	0,00075	256,3	0,74	1215	7,0
10	37,85	0,10	1,281	0,0000000	0,04157	0,0000000	277,1	1,5	0,3043	0,00080	298,5	0,79	1433	7,6
11	41,85	0,10	1,338	0,0000000	0,04535	0,0000000	338,7	1,6	0,3670	0,00088	360,1	0,86	1751	8,4
12	43,85	0,10	1,368	0,0000000	0,0474	0,0000000	371,9	1,7	0,4020	0,00092	394,4	0,90	1923	8,8
13	45,35	0,10	1,387	0,0000000	0,04873	0,0000000	397,8	1,8	0,4274	0,00094	419,3	0,92	2057	9,1
14	46,85	0,10	1,405	0,0000000	0,0500	0,0000000	424,5	1,8	0,4531	0,00097	444,5	0,95	2195	9,4
15														

$$x1 = T^2 / (2 * 3.14159)^2$$

$$m = 193.4 / 1000$$

$$y = m * L * L$$

$$x = m * L * T^2 / (2 * 3.14159)^2$$

$$Jtot = m * 981 * L * T^2 / (2 * 3.14159)^2$$

$$L2 = L * L$$

II Période en fonction de l'amplitude

