

Correction – Physique-chimie – DS 4

I Filtre ADSL

1 - Pour récupérer seulement les signaux téléphoniques il faut un filtre passe-bas.

Pour récupérer seulement les signaux informatiques il faut un filtre passe-haut.

On peut proposer une fréquence de coupure f_0 autour de 10 kHz.

2 - À basses fréquences, les bobines sont équivalentes à des fils. On a donc $s = 0$.

À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts. On montre alors que le courant parcourant les résistances est nul. Celles-ci ne jouent donc aucun rôle. On a donc $s = e$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut.

La sortie s doit donc correspondre au signal fourni à la box internet.

3 - a - Diviseur de tension :
$$\underline{s} = \underline{u} \times \frac{jL\omega}{R + jL\omega}.$$

b - Soit \underline{Z} l'impédance regroupant la résistance de droite et les deux bobines.

On a $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$, soit donc
$$\underline{Z} = \frac{jL\omega(R + jL\omega)}{R + 2jL\omega}.$$

On réalise alors un schéma équivalent, et on voit avec un diviseur de tension que

l'on a
$$\underline{u} = \underline{e} \times \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}.$$

4 - a - Pour $x = 1$ on a $\underline{H} = j/3$. Donc $G_{dB} = 20 \log(1/3) = -20 \log(3)$, et $\varphi = \pi/2$.

b - ★ Hautes fréquences : $\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1$, $\underline{H} \sim 1$.

★ Basses fréquences : $\underline{H} \sim \frac{-x^2}{1} = -x^2$, $\underline{H} \sim -x^2$.

c - ★ Pour le gain :

On a $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$.

À hautes fréquences on a donc $G_{dB} \sim 20 \log(1) = 0$.

À basses fréquences $G_{dB} \sim 20 \log |-x^2| = 40 \log x$, soit une pente de +40 dB par décade.

★ Pour la phase :

$\varphi = \arg(\underline{H})$.

À hautes fréquences on a donc $\varphi \sim \arg(1) = 0$.

À basses fréquences $\varphi \sim \arg(-x^2) = \pm\pi$ car il s'agit d'un réel négatif. Comme elle vaut $\pi/2$ en $x = 1$, on voit par continuité que le bon choix est $\varphi \sim \pi$.

d - Voir allure d'un filtre passe-haut du deuxième ordre, sans résonance ici.

$$5 - \star \quad |H| = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}}$$

$$\star \quad \arg(H) = \arg(-x^2) - \arg(1 - x^2 + 3jx).$$

$$\text{Or } \arg(-x^2) = \pi.$$

$$\text{Et on a } \arg(1-x^2+3jx) = \arg\left(j \times \left[\frac{1-x^2}{j} + 3x\right]\right) = \arg(j) + \arg(-j(1-x^2) + 3x) = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{-(1-x^2)}{3x}.$$

Donc finalement :

$$\arg(H) = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1-x^2}{3x}.$$

Remarque : Si on n'utilise pas l'astuce de la factorisation par j , alors il faut séparer les cas :

$$\arg(H) = \pi - \arctan \frac{3x}{1-x^2} \text{ si } x < 1 \quad \text{et} \quad \arg(H) = -\arctan \frac{3x}{1-x^2} \text{ si } x > 1,$$

ce qui revient au même si on utilise des formules comme $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$ pour $x > 0$.

II Glissade sur un igloo

6 - \star Bilan des forces sur l'enfant :

- Réaction du support

$$\vec{N} = N\vec{e}_r.$$

- Poids

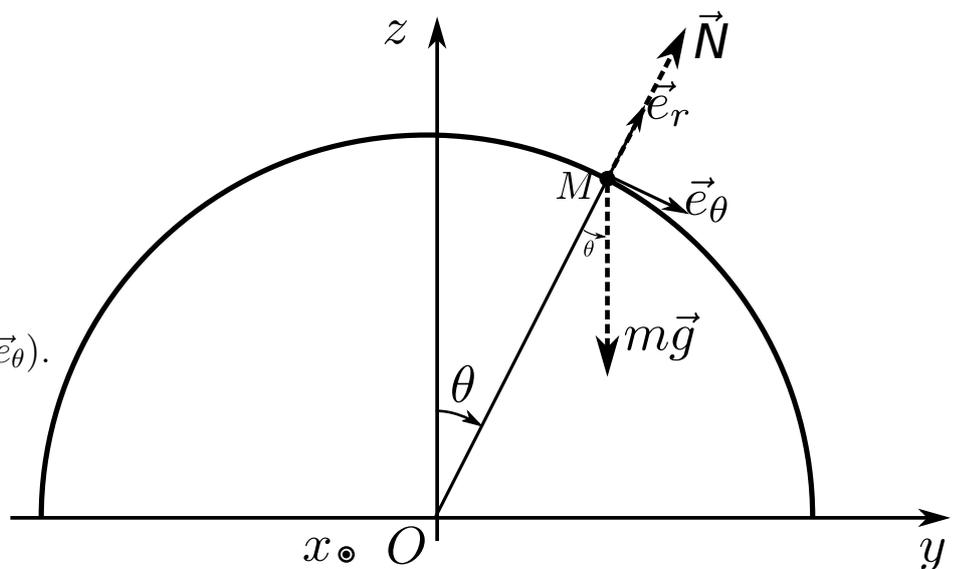
$$\vec{P} = mg(-\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta).$$

\star Pour avoir l'expression du vecteur accélération on part du vecteur position :

$$- \overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r, \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

\star PFD à l'enfant dans le référentiel d'étude galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}, \quad \text{soit} \quad mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg(-\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta) + N\vec{e}_r$$



. On projete sur \vec{e}_r et sur \vec{e}_θ :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \quad \text{et} \quad mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta.$$

L'équation du mouvement est celle qui ne contient pas l'inconnue N : $\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta$.

L'autre équation permettra d'obtenir N car elle s'écrit : $N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2$.

7 - En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ on obtient : $\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\dot{\theta} \sin \theta = 0$.

Ceci donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{g}{R} \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{R} \cos \theta \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{R} \cos \theta = C \quad (\text{constante})$$

Or à $t = 0$ on a $\theta = 0$ donc $\cos \theta = 1$, et $\dot{\theta} = 0$, donc la constante vaut $C = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{g}{R} \times 1 = \frac{g}{R}$. En réarrangeant on a bien :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta).$$

8 - On reprend l'équation obtenue en première question pour N : $N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - mR \times \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta)$, soit

$$N = mg(3 \cos \theta - 2).$$

9 - L'enfant décolle si la composante de la réaction du support s'annule. Or

$$N = 0 \Leftrightarrow 3 \cos \theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ.$$

Ceci est inférieur à 90° , donc l'enfant décolle avant d'atteindre le bas de l'igloo.

III Mesure du temps par horloge à balancier : étude du pendule

Période des petites oscillations : analyse dimensionnelle

10. La période T peut dépendre des grandeurs g [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$], m [kg] et l [m].

On cherche sous la forme $T = A \times g^a \times m^b \times l^c$ avec a , b et c des exposants inconnus et A une constante multiplicative sans dimension.

En passant aux unités on doit avoir : $\text{s} = (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^a \times \text{kg}^b \times \text{m}^c = \text{m}^{a+c} \text{kg}^b \text{s}^{-2a}$.

On doit donc avoir : $a + c = 0$, $b = 0$, $-2a = 1$, donc on en déduit $a = -1/2$ et $c = -a = 1/2$.

Conclusion : $T = A g^{-1/2} l^{1/2} = A \sqrt{\frac{l}{g}}$ avec A sans dimension.

Mise en équation et résolution dans le cas des petites oscillations

11. ★ Bilan des forces sur la masse :

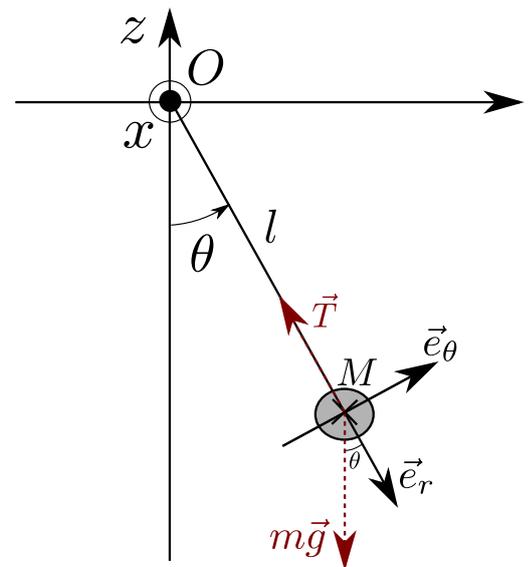
– Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.

– Poids

$$\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta).$$

★ Pour avoir l'expression du vecteur accélération on part du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r, \quad \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$



12. ★ PFD à la masse dans le référentiel d'étude galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}, \quad \text{soit} \quad ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) - T\vec{e}_r.$$

On projete sur \vec{e}_θ :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta, \quad \text{d'où} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta.$$

13. Hypothèse $\theta \ll 1$, donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. On pose $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Solution générale $\theta(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$.

C.I. : $\dot{\theta}(0) = 0$ donc $B = 0$, puis $\theta(0) = \theta_0$ donc $A = \theta_0$.

Donc $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$.

$$14. \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

$$15. \quad \text{Pour } T_0 = 2\text{ s on trouve } l = g \frac{T_0^2}{4\pi^2} = 0,99 \text{ m.}$$

Influence des frottements

16. Même bilan que précédemment mais avec en plus la force $\vec{f} = -C\vec{v} = -Cl\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

La projection du PFD sur \vec{e}_θ donne donc :

$$ml\ddot{\theta} = -Cl\dot{\theta} - mg \sin \theta, \quad \text{d'où } \ddot{\theta} + \frac{C}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Avec l'approximation des petits angles on a bien :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

17. Forme canonique : $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

$$\text{On a donc } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{C}{m}, \text{ d'où } Q = \omega_0 \frac{m}{C}, \text{ soit } Q = \frac{m}{C} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

18. Le nombre d'oscillations donne l'ordre de grandeur du facteur de qualité, soit donc ici $Q \simeq 100$.

19. $\star Q > 1/2$ donc solution homogène du type $(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\mu t}$. La solution particulière est nulle.

\star Pour obtenir Ω et μ on écrit l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \frac{\omega_0^2}{4} = 0$, dont les racines sont :

$$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

$$\text{Or } r_{\pm} = -\mu \pm j\Omega, \text{ donc } \mu = -\frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

\star Enfin on utilise les CI pour obtenir A et B :

– CI1 : $\theta(0) = \theta_0$, donc $A = \theta_0$.

– CI2 : $\dot{\theta}(0) = 0$. Or $\dot{\theta} = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) (-\mu) e^{-\mu t} + (-A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \cos \Omega t) e^{-\mu t}$,
et donc en $\dot{\theta}(0) = A(-\mu) + B\Omega$. Donc $B = \frac{A\mu}{\Omega} = \frac{\theta_0\mu}{\Omega}$.

$$\text{On a donc : } \theta(t) = \theta_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\mu}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-\mu t}.$$

Expression de la période dans le cas des grandes oscillations

20. On multiplie par $\dot{\theta}$: $\dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2\dot{\theta}\sin\theta = 0$, donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta\right) = 0$,

donc $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta = \text{cst.}$

Or à $t = 0$ on a $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \theta_0$, ce qui donne la constante : $\text{cst} = -\omega_0^2\cos\theta_0$.

On a donc $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta = -\omega_0^2\cos\theta_0$, soit donc $\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$.

21. $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$, donc $d\theta = dt \times \sqrt{2}\omega_0\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$.

22. L'idée est de dire que la période T est la somme des petits intervalles de temps dt .

On somme entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$, ce qui donne en fait un quart de période. Durant cet intervalle θ décroît et donc $\dot{\theta} < 0$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_{t=0}^{T/4} dt \\ &= \int_{\theta=\theta_0}^0 -\sqrt{2}\omega_0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \\ &= \int_0^{\theta_0} \sqrt{2} \frac{2\pi}{T_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$T = T_0 \times \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}, \quad \text{avec } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Expression approchée de la période dans le cas des oscillations pas trop grandes

23. Étape 1, DL : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \omega_0^2\frac{\theta^3}{6} = 0$.

Étape 2 : ci-dessus on remplace θ par son expression $\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t)$:

$$-\omega^2\theta_0\sin\omega t + \omega_0^2\theta_0\sin\omega t - \frac{\omega_0^2}{6}\theta_0^3\sin^3\omega t = 0.$$

Étape 3 : on utilise la formule trigonométrique en négligeant le terme $\sin 3\omega t$:

$$-\omega^2\theta_0\sin\omega t + \omega_0^2\theta_0\sin\omega t - \frac{\omega_0^2}{6}\theta_0^3\frac{3}{4}\sin\omega t = 0.$$

Enfin, on isole ω : $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)$.

$$24. \text{ On a } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)^{-1/2} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta_0^2}{8}\right).$$

$$\text{On a bien } \boxed{T = T_0 \times \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}.$$

25. $\theta_0 = 30^\circ = 0,5 \text{ rad}$, on lit alors un écart de 2×10^{-4} soit 0,02%.

26. Avec la formule : $3600T = 3662 \text{ s}$ soit une heure et 62 s (ou par lecture graphique, $T \simeq 1,2 \text{ s}$ et $3600T \simeq 3672 \text{ s}$).

Sur une journée, ceci donne un retard de 24 minutes, bien supérieur aux dix secondes données dans le graphique. Ceci montre que Huygens avait bien pris en compte la dépendance en θ_0 .

IV La révolution de l'horloge à quartz _____

IV.1 Étude d'un circuit à quartz

Étude du quartz

27. $\underline{i} = \frac{u_e}{\underline{Z}_q}$ par définition de l'impédance.

28. Calcul de l'impédance équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_q} &= jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} \\ &= jC_0\omega + \frac{jC_1\omega}{1 + (jL_1\omega)(jC_1\omega)} \\ &= jC_0\omega + \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= \frac{jC_0\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= \frac{j(C_0 + C_1)\omega - jC_0L_1C_1\omega^3}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= j(C_0 + C_1)\omega \times \frac{1 - \frac{C_0L_1C_1}{C_0 + C_1}\omega^2}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= jC_{\text{éq}}\omega \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \boxed{\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}}, \quad \boxed{\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_0C_1}{C_0 + C_1}L_1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{C_{\text{éq}} = C_0 + C_1}.$$

29. On a $\underline{i} = \underline{u}_e \times 1/|\underline{Z}_q|$, donc on regarde si $1/|\underline{Z}_q|$ diverge.

On a $1/|\underline{Z}_q| \rightarrow \infty$ pour $\omega = \omega_1$, donc la fréquence de résonance est $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}$.

30. Soit $\underline{Z}_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à r , C et L en série. On a :

$$\begin{aligned} \underline{i} &= \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{\underline{u}_e}{r + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} \\ &= \frac{\underline{u}_e/r}{1 + \frac{jL_1\omega}{r} + \frac{1}{jrC_1\omega}} \\ &= \frac{\underline{u}_e/r}{1 + j\left(\frac{L_1\omega}{r} - \frac{1}{rC_1\omega}\right)}. \end{aligned}$$

Il faut identifier avec la forme $\frac{\underline{u}_e/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)}$. On a donc $\frac{Q}{\omega_1} = \frac{L_1}{r}$ et $Q\omega_1 = \frac{1}{rC_1}$.

La première donne $Q = \omega_1 \frac{L_1}{r}$, qu'on injecte dans la seconde : $\omega_1 \frac{L_1}{r} \times \omega_1 = \frac{1}{rC_1}$ soit

donc $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$.

Puis on trouve $Q = \omega_1 \frac{L_1}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$.

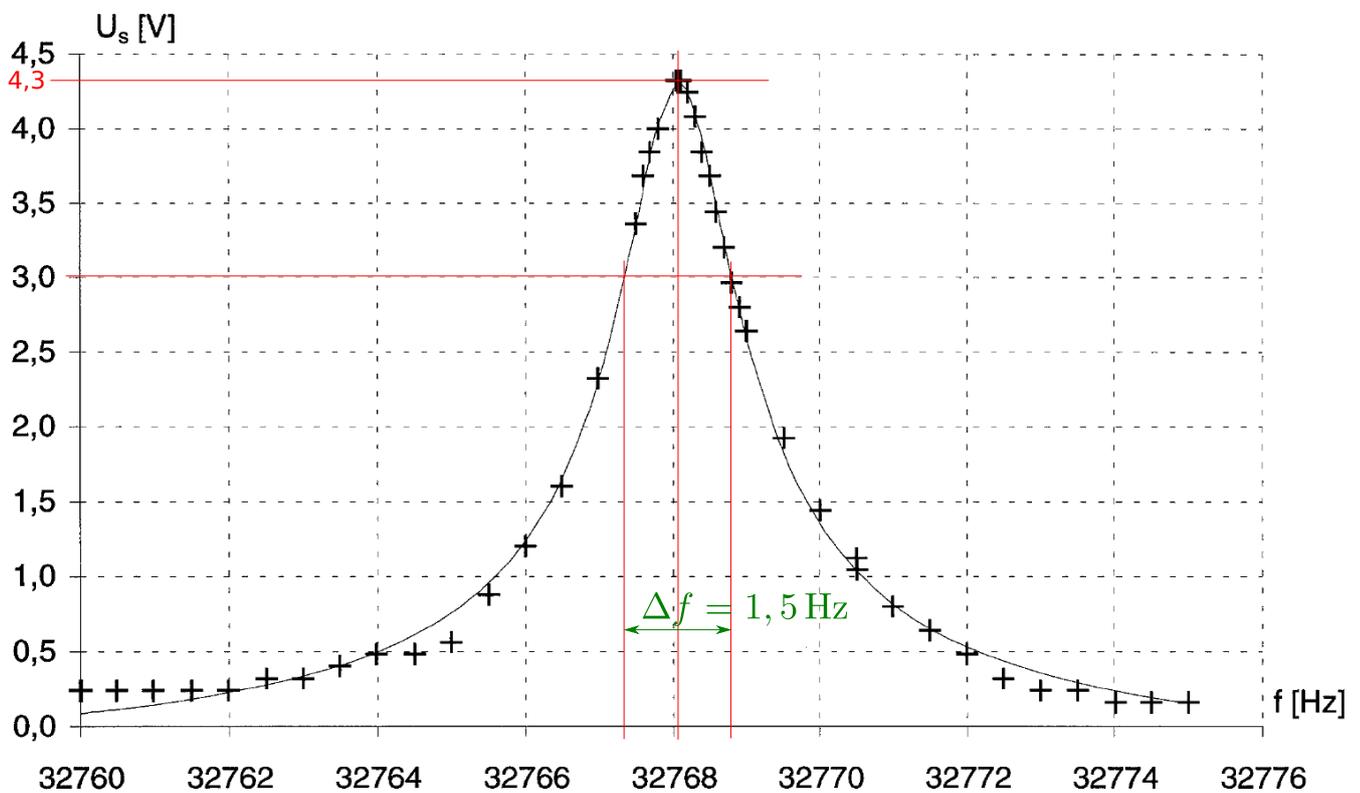
31. En utilisant l'expression précédente de \underline{i} , on voit qu'à la résonance (donc pour $\omega = \omega_1$) on a $\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{r}$.

On a donc, en prenant le module, la relation suivante entre les amplitudes des signaux : $i_0 = \frac{u_0}{r}$.

Or le graphique montre l'amplitude U_s , qui vaut $U_s = Ri_0$.

Ainsi à la résonance on a $U_s = Ri_0 = \frac{Ru_0}{r}$.

On lit $U_s = 4,3 \text{ V}$, donc $r = \frac{Ru_0}{U_s} = \frac{47 \text{ k}\Omega \times 0,2}{4,3} = 2,2 \text{ k}\Omega$.



32. Mesure de la largeur Δf : $4,3 \text{ V} / \sqrt{2} = 3 \text{ V}$, on lit $\Delta f = 1,5 \text{ Hz}$.

$$\text{D'où } Q = \frac{32768}{1,5} = 22\,000 \simeq 20\,000.$$

33. On part de $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ et on isole $L_1 = \frac{rQ}{\omega_1}$ et $C_1 = \frac{1}{\omega_1 r Q}$.

34. $L_1 = 200 \text{ H}$.

Ces valeurs ne sont pas des valeurs usuelles pour des composants électroniques. C'est normal, car il ne s'agit pas de composants réels, mais d'outils servant à modéliser la réponse mécanique du quartz. On peut aussi dire qu'il serait impossible de concevoir un circuit électronique compact avec ces valeurs.

Utilisation dans une montre

35. Il y a environ $Q = 20\,000$ oscillations libres, chacune de durée $1/f_1$, donc une durée totale $\sim Q/f_1 \simeq 1 \text{ s}$.

Ce n'est pas raisonnable pour fabriquer une horloge, il faut entretenir les oscillations.

36. La montre doit délivrer un signal de fréquence 1 Hz, qui est obtenu en divisant par deux plusieurs fois de suite le signal à 32 768 Hz. (Une division par deux est effectuée facilement à l'aide d'un circuit logique.)

Précision

37. Pour une seconde, la variation est de 10^{-6} s. Sur une journée, soit 86400 s, elle sera donc de 86 ms.
38. C'est bien supérieur à la précision atteinte par les horloges à quartz indiquées dans la figure.

Un moyen simple de contrôle est de placer le quartz dans une enceinte contrôlée en température.