Étude des systèmes linéaires
Chapitre 5

Filtrage

I Généralités sur les filtres

1 - Qu'est-ce qu'un filtre
2 - Action sur les signaux harmoniques et périodiques
3 - Fonction de transfert

$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \longrightarrow$ **filtre** (système linéaire invariant) $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$ $\longrightarrow s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$

$|\underline{H}| = \dfrac{S_0}{E_0}$

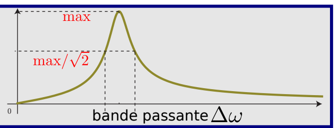
$\arg \underline{H} = \varphi_s - \varphi_e$

4 - Comportement en fréquence
- Calcul du gain $G = |H|$
- Calcul du gain en décibel $G_{dB=20\log|H|}$
- Calcul de l'argument $\Delta\varphi$

$\longrightarrow$ diagramme de Bode

5 - Étude asymptotique d'un filtre
- BF $\omega \to 0 \longrightarrow$ bobine=fil | condensateur=int.ouvert
- HF $\omega \to \infty \longrightarrow$ bobine=int.ouvert | condensateur=fil

6 - Pulsation de coupure et bande passante



II Filtre du 1er ordre

1 - Équation différentielle $\longrightarrow \underline{H}$
2 - Passe-bas
3 - Passe haut

a/ étude asymptotique
b/ diagramme de Bode
c/ expressions gain et déphasage
e/ pulsations de coupure et bande passante

III Filtres du 2nd ordre

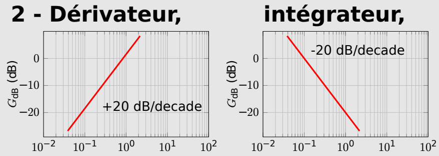
1 - Équation différentielle $\longrightarrow \underline{H}$
2 - Passe-bas
3 - Passe haut

4 - Autres filtres **5 - Bilan**

IV Action d'un filtre sur un signal périodique

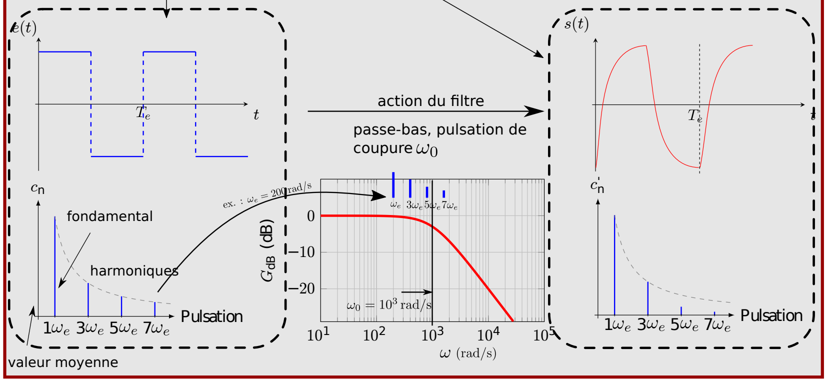
1 - Décomposition de Fourier

2 - Dérivateur, intégrateur, moyenneur

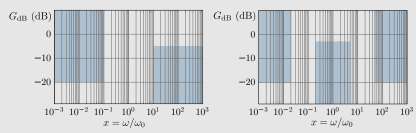


passe-bas bien choisi

3 - Action d'un filtre sur un signal



4 - Gabarit d'un filtre



Ce qu'il faut connaître

—— (cours : I)

▶1 Si un système linéaire invariant reçoit en entrée une grandeur du type $e_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, quelle est la forme de la grandeur de sortie ?

▶2 Comment est définie la fonction de transfert d'un filtre dont l'entrée est $e(t)$ et la sortie $s(t)$? Son gain ? Son gain en décibel ?

▶3 Comment est définie la pulsation de coupure d'un filtre ? Et sa bande passante ?

—— (cours : II)

▶4 Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique (période T_0, pulsation ω_0) en une somme de fonctions sinusoïdales.

Dans cette décomposition, qu'est-ce qui est appelé le fondamental ? Et les harmoniques ? Quelles sont leurs pulsations ?

Faire un schéma de l'allure d'un spectre (d'un signal créneau par exemple). Où trouve-t-on la valeur moyenne ?

▶5 Quelle partie d'un diagramme de Bode a-t-elle pour action de dériver le signal d'entrée ?

Et d'intégrer le signal d'entrée ?

Que faut-il faire pour ne garder que la valeur moyenne d'un signal périodique ?

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

▶6 Exprimer la fonction de transfert d'un circuit électronique ou d'un système mécanique. → **EC1**, **EC1bis**

▶7 Calculer le module et l'argument de la fonction de transfert, les représenter graphiquement. → **EC2**

▶8 Tracer le diagramme de Bode associé à une fonction de transfert. → **EC3**

▶9 Étant donné un signal harmonique en entrée, en déduire l'expression du signal de sortie (la fonction de transfert étant donnée). → **EC1**

▶10 Réaliser l'étude asymptotique d'un filtre (prévision du comportement à basse et haute fréquence). → **EC4**

——— (cours : I, annexes)

▶11 Étant donnée l'expression canonique d'un filtre passe-bas du 1^er ou du 2^nd ordre, passe-haut du 1^er ordre, ou passe-bande du 2^nd ordre, savoir :

- Réaliser l'étude asymptotique et tracer l'allure du diagramme de Bode.
- Exprimer le gain en décibel et l'argument de $\underline{H}$.
- Retrouver les expressions des pulsations de coupures.
- Pour le cas de l'ordre 2, retrouver la condition de présence d'une résonance.

- Voir pour cela tous les exemples des annexes ; et le TD II, III.

——— (cours : II)

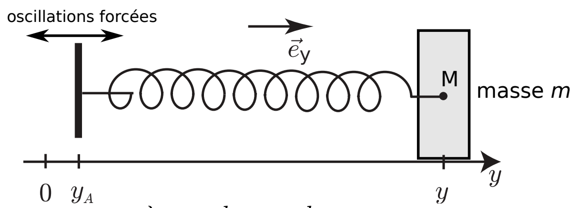
▶12 Prédire l'action d'un filtre sur un signal périodique. → TD V

▶13 Établir le gabarit d'un filtre en fonction d'un cahier des charges. → TD IV

Exercices de cours

Exercice C1 – Exprimer la fonction de transfert d'un système mécanique

On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide $l_0 = 0$ et de constante de raideur k. On prend en compte les frottements via une force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. L'extrémité gauche du ressort est forcée par un mouvement d'oscillation selon $y_A(t) = A\cos(\omega t)$.

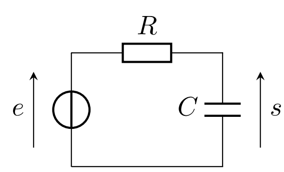


On admet que l'application du PFD mène à l'équation suivante sur $y(t)$: $\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}y_A(t)$.

1 - En déduire l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{y}}{\underline{y}_A}$.

Exercice C1bis – Exprimer la fonction de transfert d'un circuit électronique

On considère le circuit RC ci-contre.



1 - Donner l'expression de la fonction de transfert de ce filtre.

2 - On considère le signal d'entrée $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. Comment s'écrit le signal de sortie (en fonction de E_0, ω, t, $|\underline{H}|$ et $\arg(\underline{H})$) ?

Exercice C2 – Calculer le module et l'argument de la fonction de transfert, les représenter graphiquement

On reprend le cas du circuit RC ci-dessus, pour lequel $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}$. On pose $\omega_0 = 1/RC$.

1 - Donner les expressions du gain du filtre et de l'argument $\Delta\varphi$ de $\underline{H}$.

2 - Tracer l'allure de $G(\omega)$ et de $\Delta\varphi(\omega)$ (en échelle linéaire).

Exercice C3 – Tracer le diagramme de Bode associé à une fonction de transfert

On reprend le cas du circuit RC ci-dessus, pour lequel $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega/\omega_0}$.

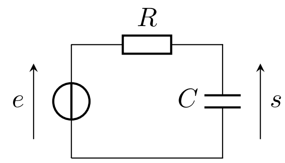
1 - Donner un équivalent de $\underline{H}$ en $\omega = 0$ et en $\omega = +\infty$.

2 - En déduire les équations des asymptotes dans le diagramme de Bode en gain et en phase (donc en échelle log pour la fréquence).

3 - Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude et en phase, avec en abscisse ω/ω_0 (échelle log).

Exercice C4 – Réaliser l'étude asymptotique d'un filtre

Pour le système ci-contre :

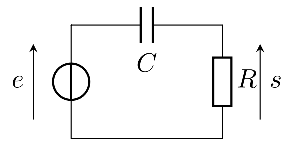


1 - Étudier le comportement asymptotique sans calcul.

2 - En déduire la nature du filtre.

Exercice C5 – Filtre passe-haut du premier ordre

On considère le filtre ci-contre ?



1 - Exprimer la fonction de transfert et la mettre sous la forme $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

Dans la suite on pose $x = \omega/\omega_0$.

3 - Dans le diagramme de Bode en amplitude : établir l'expression de l'asymptote basse fréquence. Quelle est sa pente, et par quelle valeur passe-t-elle pour $x = 1$?

Etablir également l'expression de l'asymptote haute fréquence.

En déduire l'allure du diagramme de Bode en amplitude.

4 - Faire le même travail pour le diagramme de Bode en phase.

5 - Enfin, exprimer la pulsation de coupure ω_c.

Cours

I – Généralités sur les filtres

1 – Qu'est-ce qu'un filtre ?

Définition

Filtre : C'est un système qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère de fréquence.

On étudie ici uniquement des filtres linéaires, donc réalisés par un *système linéaire invariant* (cf chapitre précédent).

Les exemples d'applications sont très nombreux :

- En électronique, un filtre sélectif permet de supprimer du bruit parasite, de mettre en forme un signal, d'effectuer des opérations de traitement. Par exemple une chaine hifi doit envoyer les fréquences graves, intermédiaires ou aigues vers chacun des haut-parleurs dédiés. Une radio ou un téléphone doit sélectionner la fréquence à recevoir. Etc...
- En mécanique, un amortisseur agit comme un filtre qui atténue les hautes fréquences.
- En optique, un filtre permet de sélectionner certaines longueurs d'onde seulement.

2 – Action sur les signaux harmoniques et périodiques

On note comme au chapitre précédent $e(t)$ un signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie associé, et $e(t) \xrightarrow{\text{sys}} s(t)$ l'action du filtre.

Rappels :

- Par rapport à $e(t)$, le signal de sortie est de même pulsation, mais d'amplitude et de déphasage différents :

$$\boxed{e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s).}$$

3 – Fonction de transfert

Rappels : On se place en RSF.

$\rightsquigarrow_1$ Le signal $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$ est représenté par $\underline{e}(t) = \underline{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{E}_0 = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_e}$.

$\rightsquigarrow_2$ Le signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$ est représenté par $\underline{s}(t) = \underline{S}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{S}_0 = S_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_s}$.

Définition : fonction de transfert d'un filtre

Fonction de transfert d'un filtre :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}_0}{\underline{E}_0}.}$$

On définit le **gain** $\boxed{G(\omega) = |\underline{H}|}$ et le **gain en décibel** $\boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log(|\underline{H}|).}$

Propriétés

La fonction de transfert contient toute l'information sur le filtre, car on a :

- $|\underline{H}(\omega)| = \left|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right| = \frac{S_0}{E_0} \quad \rightarrow \quad$ permet de connaître l'amplitude de sortie S_0.
- $\arg(\underline{H}(\omega)) = \arg\left(\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right) = \varphi_s - \varphi_e \quad \rightarrow \quad$ permet de connaître la phase de sortie φ_s.

$\rightsquigarrow_3$ Détail des calculs :

Remarquons d'abord que : $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\underline{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = \frac{\underline{S}_0}{\underline{E}_0}$

– $|\underline{H}(\omega)| = \left|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right| = \frac{|\underline{S}_0|}{|\underline{E}_0|} = \frac{S_0}{E_0}$

– $\arg(\underline{H}(\omega)) = \arg\left(\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right) = \arg\left(\frac{\underline{S}_0}{\underline{E}_0}\right) = \arg \underline{S}_0 - \arg \underline{E}_0 = \varphi_s - \varphi_e$

$\rightsquigarrow_4$ Exemple de calcul de fonction de transfert : **EC1** et **EC1bis**.

4 – Comportement en fréquence

On peut tracer $G(\omega)$ ou $\arg(\underline{H})$ en fonction de ω pour avoir une idée du comportement du filtre.

$\rightsquigarrow_5$ Exemple pour le filtre RC : **EC2**

Comme la pulsation ω peut varier sur de grands intervalles (de quelques Hz à plusieurs MHz par exemple), on préfère souvent utiliser une échelle logarithmique. On parle alors de diagramme de Bode.

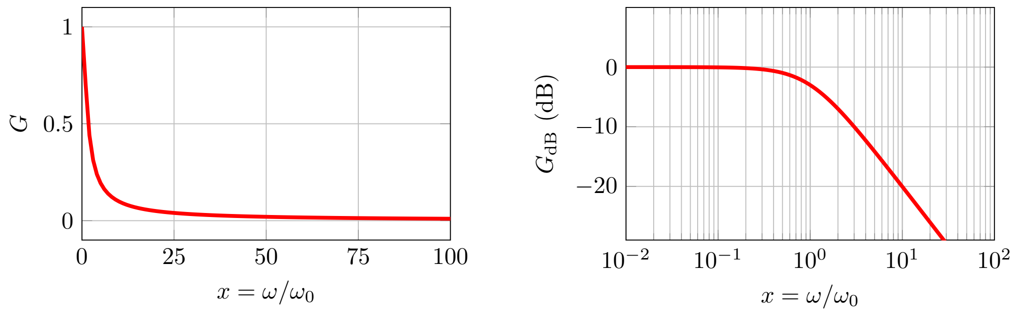
Définition

- Le **diagramme de Bode en gain** est le tracé de G_{dB} en fonction de $\log \omega$ (ou de $\log f$).
- Le **diagramme de Bode en phase** est le tracé de $\arg(\underline{H})$ en fonction de $\log \omega$ (ou de $\log f$).
- Sur ces diagrammes, **une décade** représente la multiplication par 10 de ω (ou de f).

$\rightsquigarrow_6$ Exemple pour le filtre RC : **EC3**

Attention avec les échelles. Ci-dessous pour le même filtre :

- Tracé de G en fonction de ω/ω_0, échelle linéaire en abscisse et ordonnée.
- Tracé de G_{dB} en fonction de ω/ω_0, mais avec une échelle logarithmique en abscisse.
  En abscisse il n'y a pas de 0, il est à l'infini vers la gauche.
  En ordonnée $G_{\text{dB}} = 20\log G$ donc c'est aussi une sorte d'échelle logarithmique, mais pour G.
  On a donc une échelle log-log, c'est dans ce type de diagramme que les asymptotes vont souvent être des droites.



Interprétation de G_{dB}. $G_{\text{dB}} = 20\log(S_0/E_0)$ donc :

- $G_{\text{dB}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_0 = E_0$
- $G_{\text{dB}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_0 > E_0$, amplification
- $G_{\text{dB}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_0 < E_0$, atténuation

5 – Étude asymptotique d'un filtre

Avant même de calculer ou de tracer la fonction de transfert, on peut prédire simplement le comportement du filtre à basse fréquence ($\omega \to 0$) et à haute fréquence ($\omega \to +\infty$) en remplaçant bobines et condensateurs par leur comportement limite.

$\rightsquigarrow_7$ À basse fréquence, bobine =fil et condensateur =int. ouvert

$\rightsquigarrow_8$ À haute fréquence, bobine =int. ouvert et condensateur =fil

$\rightsquigarrow_9$ Exemple sur le circuit RC : **EC4**

Type de filtre
Ces études asymptotiques permettent de déterminer facilement le type de filtre. Par exemple :

- Passe-bas : coupe les hautes fréquences
- Passe-haut : coupe les basses fréquences
- Passe-bande : coupe les hautes et basses fréquences
- Coupe-bande : coupe des fréquences intermédiaires, mais ni les HF ni les BF

6 – Pulsation de coupure et bande passante à -3 dB

Définition

La **bande passante** est l'ensemble des pulsations qui "passent" sans être trop atténuées, c'est-à-dire qu'un signal en entrée ayant une pulsation ω comprise dans la bande passante n'est pas trop atténué.

Les **pulsations de coupures** sont les pulsations qui délimitent la bande passante.

Par convention, ce sont celles pour lesquelles $G_{\max}$ est divisée par $\sqrt{2}$:

$$\boxed{\omega_c \quad \text{est telle que } G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}.}$$

Si l'on passe au log, comme $20\log(\sqrt{2}) \simeq 3$, la définition devient :

$$\boxed{\omega_c \quad \text{est telle que } G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\,\text{dB}.}$$

Il peut y avoir une ou deux pulsations de coupures.

$\rightsquigarrow_{10}$ Exemple sur le circuit RC :

$G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2/\omega_0^2}}$ donc le maximum est $G_{\max} = 1$.

On cherche donc ω_c tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega_c^2/\omega_0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ceci implique $1+\omega_c^2/\omega_0^2 = 2$, et donc $\boxed{\omega_c = \omega_0}$.

La pulsation de coupure est donc donnée par ω_0.

II – Action d'un filtre sur un signal périodique

1 – Aspect temporel : dérivateur, intégrateur, moyenneur

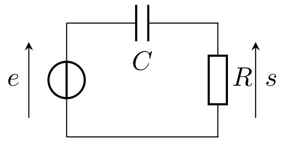
Propriété : dérivateur ⇔ +20 dB/déc

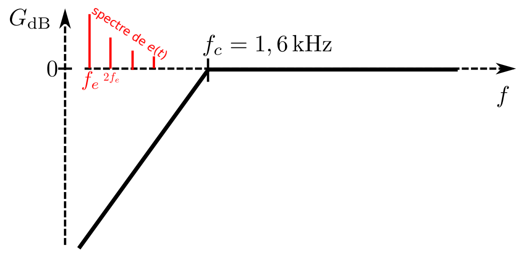
Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente +20 dB/déc, alors il aura un comportement dérivateur sur cette gamme de fréquence.

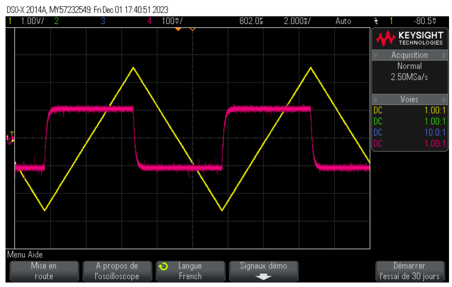
Démonstration :

$$\text{Dériver} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{s} = K \times \mathrm{j}\omega\, \underline{e} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = K\mathrm{j}\omega \quad \Leftrightarrow \quad G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| = 20\log(K\omega) = 20\log K + \underbrace{20\log\omega}_{\text{pente } +20\text{dB/déc}}$$

Exemple :







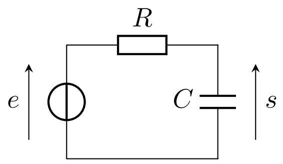
Propriété : intégrateur ⇔ -20 dB/déc

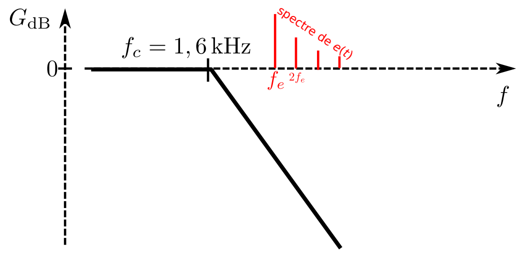
Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente -20 dB/déc, alors il aura un comportement intégrateur sur cette gamme de fréquence.

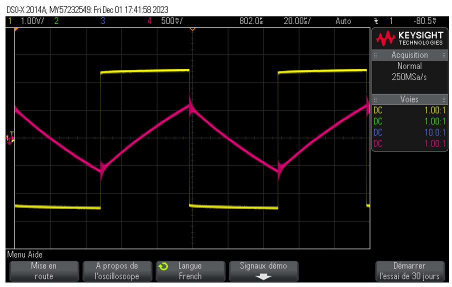
Démonstration :

$$\text{Intégrer} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{s} = \frac{K}{\mathrm{j}\omega}\underline{e} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{K}{\mathrm{j}\omega} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{K}{\mathrm{j}\omega} = 20\log K - \underbrace{20\log\omega}_{\text{pente -20dB/déc}}$$

Exemple :







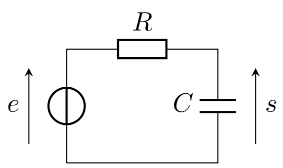
Propriété : moyenneur ⇔ passe-bas

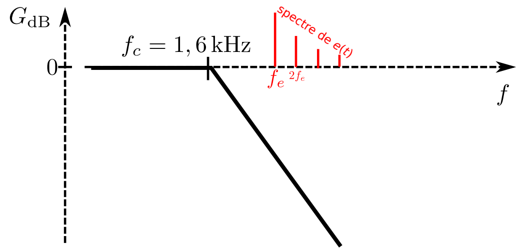
Un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c très petite devant la fréquence f_e du signal $e(t)$ d'entrée aura un effet moyenneur.

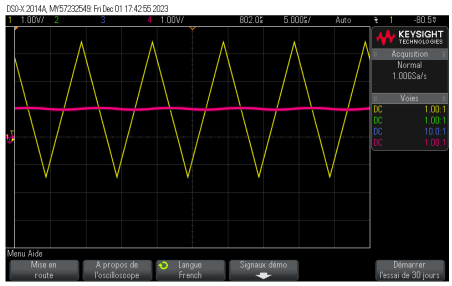
Démonstration :

$e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{c_n \cos(2\pi n f_e t + \varphi_n)}_{\text{composante de fréquence } n\times f_e}$
tous les cosinus sont coupés par le filtre passe-bas car ils sont de fréquence grande devant f_c (et un passe bas coupe tout ce qui est au delà de f_c. Donc en sortie il ne reste que $s(t) = c_0$, ce qui est bien la moyenne de $e(t)$.

Exemple :







2 – Décomposition de Fourier d'un signal périodique

Tout signal se décompose comme somme de signaux harmoniques, dont l'amplitude et la phase à l'origine de chacun est donnée par le **spectre** du signal.

On considère un signal périodique $e(t)$, de période T_e et pulsation $\omega_e = \dfrac{2\pi}{T_e}$.

Il peut se décomposer en série de Fourier : $\boxed{e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n).}$

Définitions (rappels sur le spectre)

- c_0 est la **valeur moyenne** du signal, ou encore sa **composante continue**.
- Le n-ième terme est appelé l'**harmonique** de rang n, sa pulsation est $n\omega_e$ (multiple entier de ω_e).
- L'harmonique $n = 1$ est de même période que le signal $e(t)$, il s'agit du **fondamental**. ω_e est aussi appelée pulsation fondamentale.

On rappelle que pour chaque harmonique, on a $c_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n) \xrightarrow{\text{sys}} c'_n \cos(n\omega_e t + \varphi'_n)$.
On regarde donc individuellement comment chaque harmonique est transformée par la fonction de transfert.
Dit autrement, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} e(t) = c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n) \quad \xrightarrow{\text{sys}} \quad s(t) = c'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c'_n \cos(n\omega_e t + \varphi'_n), \\ \text{avec} \quad c'_n = c_n \times |\underline{H}(n\omega_e)|, \quad \text{et} \quad \varphi'_n = \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega_e)). \end{array}}$$

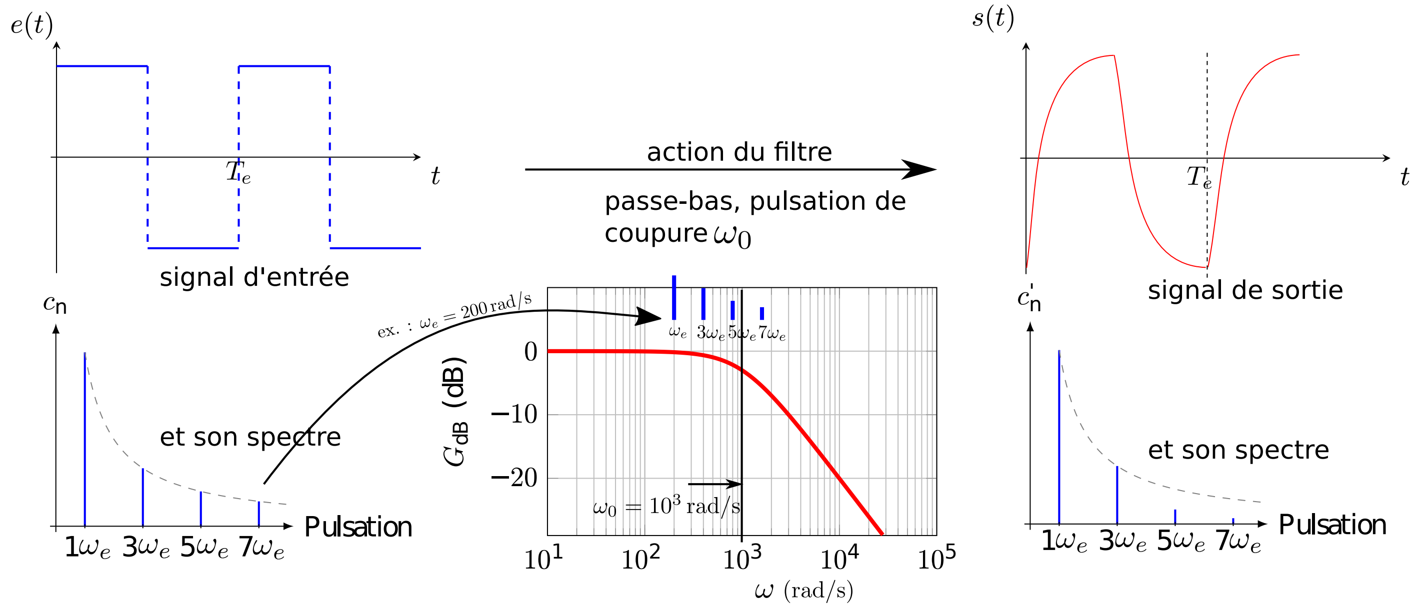
On rappelle que la valeur moyenne d'un signal $s(t)$ et sa valeur efficace ont été définis au chapitre 4.0.

3 – Action d'un filtre sur un signal, méthode

Exemple : action d'un passe-bas

- On considère un filtre passe-bas du 1er ordre, de pulsation de coupure $\omega_0 = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{rad/s}$.
- On envoie en entrée un signal créneau de pulsation ω_e (et période $T_e = 2\pi/\omega_e$).

Exemple dans le cas où $\omega_e \simeq \omega_0$:

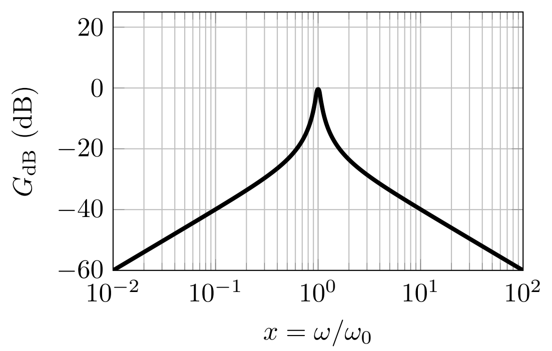


$\rightsquigarrow_{11}$ Prédire la forme du signal de sortie si $\omega_e \ll \omega_0$.

$\rightsquigarrow_{12}$ Prédire la forme du signal de sortie si $\omega_e \gg \omega_0$.

Exemple : action d'un passe bande sélectif

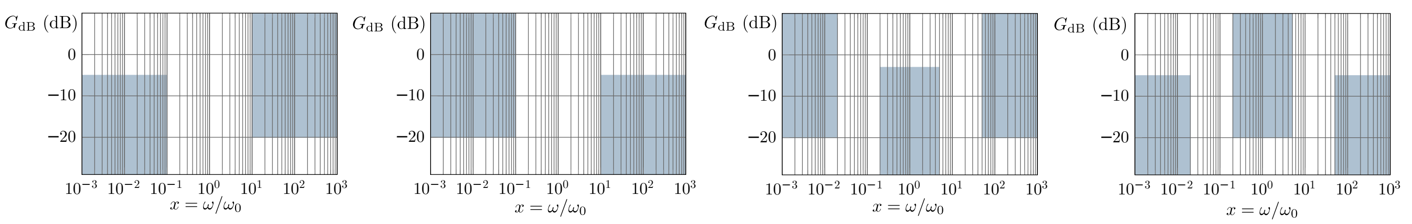
$\rightsquigarrow_{13}$ On considère un signal créneau en entrée d'un filtre passe-bande sélectif. Prédire la forme du signal de sortie si la bande passante est centrée sur l'harmonique numéro 5.



4 – Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre est le diagramme de Bode du filtre sur lequel apparaissent les zones de pulsations à laisser passer ou à atténuer.

La figure ci-dessous donne des exemples de gabarits des filtres classiques. Le tracé du gain doit éviter les zones grisées.



(a) Filtre passe-bas (b) Filtre passe-haut (c) Filtre passe-bande (d) Filtre coupe-bande ou filtre réjecteur

Annexe : filtres du 1^er^ et 2^nd^ ordre

Remarque : rien n'est à connaître par cœur dans ces parties III et IV, mais avoir déjà rencontrés ces exemples vous permettra de mieux comprendre les exercices. Les formes canoniques seront données.

III – Filtres du 1er ordre

1 – De l'équation différentielle à la fonction de transfert

Un filtre du premier ordre est régi par une équation du premier ordre sur $s(t)$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a\,s(t) \;=\; b\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + c\,e(t).}$

On passe en complexes, sachant que dériver revient à multiplier par $\mathrm{j}\omega$:

$$\mathrm{j}\omega\underline{s} + a\,\underline{s} \;=\; b\mathrm{j}\omega\underline{e} + c\,\underline{e} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{b\mathrm{j}\omega + c}{\mathrm{j}\omega + a}.$$

2 – Filtre passe-bas du 1erordre

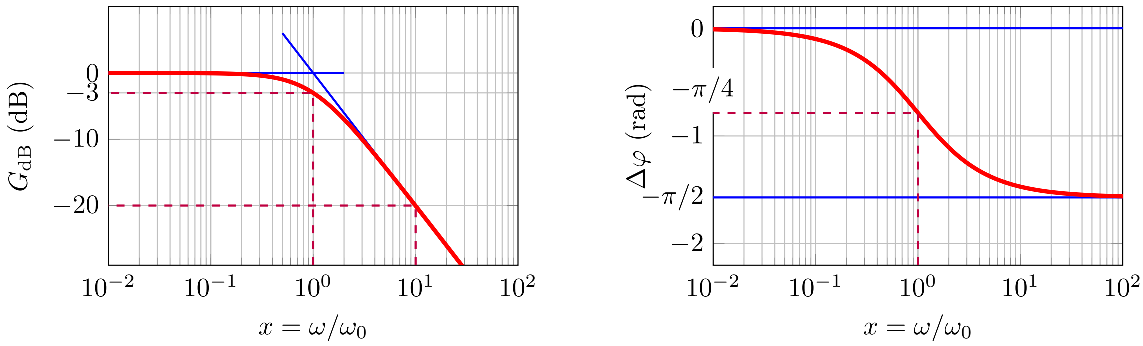
$$\text{La forme canonique pour ce filtre est :} \quad \underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}.$$

H_0 est appelé gain statique (car c'est le gain pour $\omega = 0$).

Exemple : le circuit RC série lorsque l'on prend la tension aux bornes du condensateur (que l'on a étudié juste au dessus).

Cf **EC3** pour l'étude asymptotique. On trouve que l'asymptote hautes fréquences de la courbe de gain a pour pente -20 dB/décade.

Tracés pour $H_0 = 1$:



Expression du gain et du déphasage :

Cf **EC2** : on trouve $G = |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1+\omega^2/\omega_0^2}}$ et un déphasage $\Delta\varphi = \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg H_0 - \arctan\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Pulsation de coupure : cf page précédente, $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ donne $\omega_c = \omega_0$.

3 – Filtre passe-haut du 1er ordre

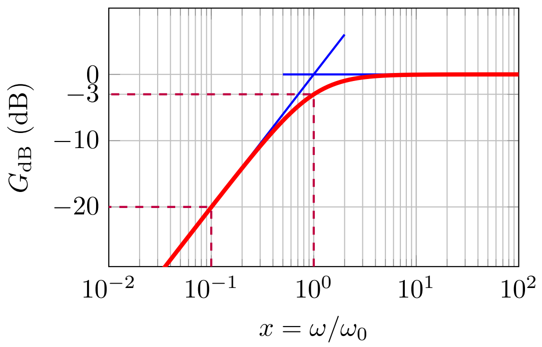
$$\text{La forme canonique pour ce filtre est :} \quad \underline{H}(\omega) = H_0\,\frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}}.$$

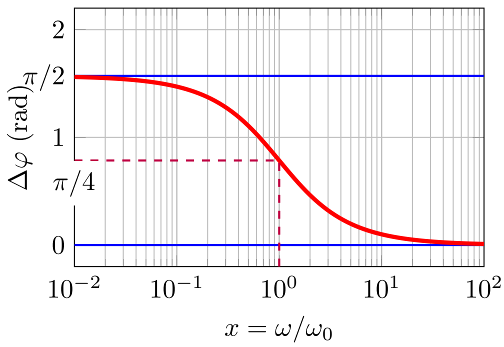
Exemples : circuit RC série lorsque l'on prend la tension aux bornes de la résistance, ou RL série lorsque l'on prend la tension aux bornes de la bobine.

a/ Étude asymptotique (pour $H_0 = 1$)

Cf **EC5** : on trouve que l'asymptote basse fréquence est de pente $+20\,\mathrm{dB}/\text{décade}$, et celle à hautes fréquences est de pente nulle.

Pour les tracés, $H_0 = 1$:





Expression du gain et du déphasage :

On trouve $G = |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{|H_0|\omega/\omega_0}{\sqrt{1+\omega^2/\omega_0^2}}$ et un déphasage $\Delta\varphi = \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg H_0 + \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Pulsation de coupure : $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ donne $\omega_c = \omega_0$.

IV – Filtres du 2nd ordre

1 – De l'équation différentielle à la fonction de transfert

Un filtre du second ordre est régi par une équation du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + b\,s(t) = c\frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2} + d\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + f\,e(t).$$

La fonction de transfert associée est obtenue en passant en complexes :

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{s} + a\mathrm{j}\omega\underline{s} + b\,\underline{s} = c(\mathrm{j}\omega)^2\underline{e} + d\mathrm{j}\omega\underline{e} + f\,\underline{e} \quad\Rightarrow\quad \left((\mathrm{j}\omega)^2 + a\mathrm{j}\omega + b\right)\underline{s} = \left(c(\mathrm{j}\omega)^2 + d\mathrm{j}\omega + f\right)\underline{e} \quad\Rightarrow\quad \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{c(\mathrm{j}\omega)^2 + d\mathrm{j}\omega + f}{(\mathrm{j}\omega)^2 + a\mathrm{j}\omega + b}.$$

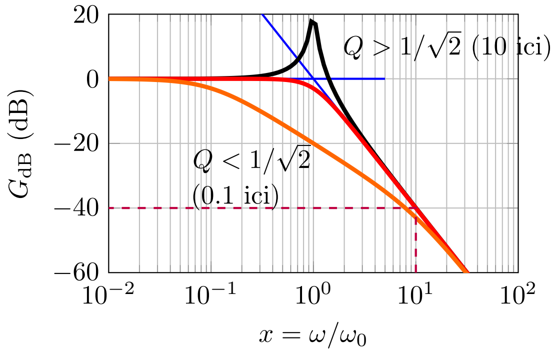
2 – Filtre passe-bas du 2ndordre

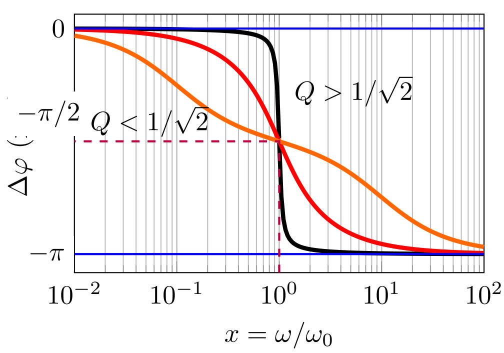
La forme canonique pour ce filtre est : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{H_0}{1 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2}$.

H_0 est appelé gain statique.

Exemple : circuit RLC série lorsque l'on prend la tension aux bornes du condensateur. (c'est l'étude de la résonance en tension du RLC série du chapitre précédent.)

Cf TD pôur l'étude asymptotique.
Ci-dessous, $H_0 = 1$.





Expression du gain et du déphasage (ici pour $H_0 = 1$) : cf chapitre 3, TD 3, calculs identiques. Par exemple :

$$G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

→ L'étude de ces fonctions a été fait au chapitre précédent (résonance du RLC en tension, suivi de $u_C(t)$). En particulier nous avons démontré que si $Q > 1/\sqrt{2} \simeq 0{,}7$, la courbe de gain présente une résonance.

Remarque : Si $Q < 1/\sqrt{2} \simeq 0{,}7$ il n'y a pas résonance. De plus, si $Q < 0{,}5$, alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles, ce qui signifie que le dénominateur de $\underline{H}$ se factorise, et donc que le filtre est en fait le produit de deux filtres d'ordre 1. Ceci ce voit sur les diagrammes de Bode car il y a une zone intermédiaire "plane".

Pulsation de coupure et bande passante à -3 dB (ici pour $H_0 = 1$) :

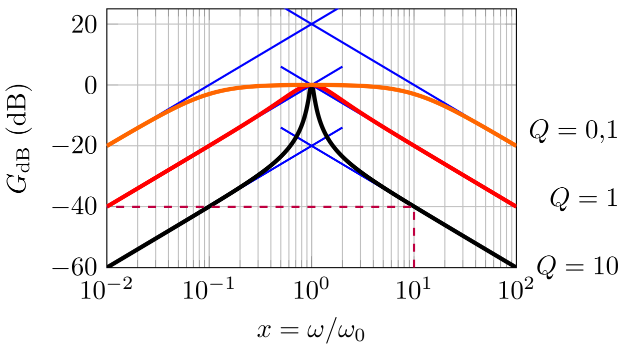
Les pulsations de coupures vérifient $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$.
Le calcul est possible, mais long. On peut toutefois les visualiser graphiquement.

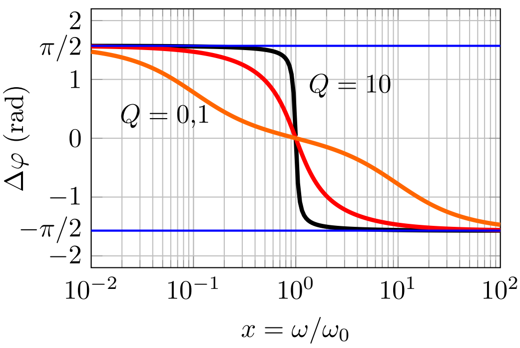
3 – Filtre passe-bande du 2ndordre

La forme canonique pour ce filtre est : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\dfrac{H_0}{Q}\dfrac{j\omega}{\omega_0}}{1+\dfrac{1}{Q}\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}+\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2} = \dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

Exemple : circuit RLC série lorsque l'on prend la tension aux bornes de la résistance (c'est l'étude de la résonance en intensité du RLC série du chapitre précédent.)
Ci-dessous, $H_0 = 1$.

Voir TD III pour le tracé des asymptotes.





Expressions du gain et du déphasage :

Cf TD : $G = |\underline{H}| = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ et $\Delta\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$.

→ L'étude de ces fonctions a été fait au chapitre précédent (résonance du RLC en intensité, suivi de $i(t)$). En particulier la courbe possède toujours un maximum en $\omega = \omega_0$.

Il est possible de montrer que si $Q > 1$, alors la courbe de G_{dB} passe au-dessus des asymptotes en $x = 1$. Si $Q < 1$ elle reste au dessous et le filtre est moins sélectif.
De plus, si $Q < 0{,}5$, alors l'équation caractéristique possède deux racines réelles, ce qui signifie que le dénominateur de $\underline{H}$ se factorise, et donc que le filtre est en fait le produit de deux filtres d'ordre 1. Ceci ce voit sur les diagrammes de Bode car il y a une zone intermédiaire "plane".

Pulsation de coupure et bande passante à -3 dB :

Les pulsations de coupures vérifient $G(\omega_c) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$. Le calcul a été fait au chapitre précédent (TD). La bande passante est $|\omega_{c,1} - \omega_{c,2}| = \dfrac{\omega_0}{Q}$.

Ainsi plus Q est grand, plus la bande passante est étroite (et plus le filtre est sélectif).

4 – Autres filtres du second ordre

Passe-haut d'ordre 2, coupe bande, passe-tout déphaseur, ordres supérieurs...

5 – Bilan sur ordre 1 et ordre 2

L'ordre d'un filtre est le degré du polynôme en jω au dénominateur de $\underline{H}$ (lorsqu'écrit comme le rapport de deux polynômes).

Ordre	Types d'asymptotes	Résonance possible ?
1	horizontale, ou pente de $+20$ dB/décade ou de -20 dB/décade	non
2	horizontale, ou pente de ± 20 dB/décade ou ± 40 dB/décade	oui