

I Trigonométrie

- 1 - $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = -\sin(\omega t - kx)$.
- 2 - $\cos(\omega t - kx + \pi) = -\cos(\omega t - kx)$.
- 3 - $\sin(\omega t - kx) = \cos(\pi/2 - [\omega t - kx]) = \cos(\omega t - kx - \pi/2)$.

II Géométrie, exemples

III Volumes, surfaces, périmètres

IV Manipuler les fractions, résoudre des équations

- 1 - $-\frac{1}{4}$
- 2 - $\frac{13}{12}$
- 3 - $-\frac{2}{3}$
- 4 - $\frac{OA - OA'}{OA' \times OA}$
- 5 - $x = \frac{df'}{d + f'} - d$
- 6 - On résout (inconnues d et t_0) :

$$\begin{cases} c_s = \frac{d}{t_s - t_0} \\ c_p = \frac{d}{t_p - t_0} \end{cases}$$

La première équation donne $d = (t_s - t_0)c_s$.

On injecte dans la seconde et on cherche à isoler t_0 :

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{d}{t_p - t_0} \\ \Leftrightarrow c_p(t_p - t_0) &= (t_s - t_0)c_s \\ \Leftrightarrow (c_s - c_p)t_0 &= t_s c_s - c_p t_p \\ \Leftrightarrow t_0 &= \frac{t_s c_s - c_p t_p}{c_s - c_p} \\ \Leftrightarrow &\boxed{t_0 = \frac{t_p c_p - c_s t_s}{c_p - c_s}} \end{aligned}$$

Puis on injecte ceci dans la première :

$$\begin{aligned}
 d &= (t_s - t_0)c_s \\
 \Leftrightarrow d &= t_s c_s - \frac{t_p c_p - c_s t_s}{c_p - c_s} c_s \\
 \Leftrightarrow d &= \frac{t_s c_s (c_p - c_s)}{c_p - c_s} - \frac{t_p c_p c_s - c_s^2 t_s}{c_p - c_s} \\
 \Leftrightarrow d &= \frac{t_s c_s c_p - t_s c_s^2 - t_p c_p c_s + c_s^2 t_s}{c_p - c_s} \\
 \Leftrightarrow & \boxed{d = \frac{(t_s - t_p) c_p c_s}{c_p - c_s}}
 \end{aligned}$$

A.N. : $\boxed{d = 469 \text{ km.}}$

7 - On résout (inconnues f_0 et v) :

$$\begin{cases} f_1 = f_0 \times \frac{c}{c - v} \\ f_2 = f_0 \times \frac{c}{c + v} \end{cases}$$

On divise la première équation par la seconde, ce qui donne $\frac{f_1}{f_2} = \frac{c + v}{c - v}$. Ceci implique :

$$\begin{aligned}
 \frac{f_1}{f_2}(c - v) &= c + v \\
 \Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2} - 1\right) c &= v \left(\frac{f_1}{f_2} + 1\right) \\
 \Rightarrow v &= c \frac{\frac{f_1}{f_2} - 1}{\frac{f_1}{f_2} + 1} \\
 \Rightarrow & \boxed{v = c \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}}
 \end{aligned}$$

À partir de là, on peut isoler f_0 dans la toute première équation et utiliser l'expression de v ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_0 \times \frac{c}{c - v} \\
 \Rightarrow f_0 &= f_1 \frac{c - v}{c} \\
 \Rightarrow f_0 &= f_1 - \frac{v}{c} f_1 \\
 \Rightarrow f_0 &= f_1 - \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} f_1 \\
 \Rightarrow f_0 &= \frac{f_1(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2} - \frac{f_1^2 - f_1 f_2}{f_1 + f_2} \\
 \Rightarrow f_0 &= \frac{f_1^2 + f_2 f_1 - f_1^2 + f_1 f_2}{f_1 + f_2} \\
 \Rightarrow & \boxed{f_0 = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}}
 \end{aligned}$$

A.N. : $f_0 = 435 \text{ Hz}$ et $v = -82,7 \text{ m/s}$ (soit 298 km/h).

V Résoudre une équation du second degré

1 - $\Delta = d^2 + 8d^2 = 9d^2 > 0$, solutions $x_+ = \frac{d + 3d}{4} = d$ et $x_- = -d/2$.

2 -

$$\begin{aligned}\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{x(D-x)} + \frac{D-x}{x(D-x)} &= \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow \frac{x + D - x}{x(D-x)} &= \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow \frac{D}{x(D-x)} &= \frac{1}{f'} \\ \Leftrightarrow Df' &= x(D-x) \\ \Leftrightarrow Df' &= xD - x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - Dx + Df' &= 0.\end{aligned}$$

On obtient un trinôme. Discriminant : $\Delta = D^2 - 4Df' = D(D - 4f')$.

Il y a des solutions x réelles seulement si $\Delta \geq 0$, donc seulement si $D \geq 4f'$.

Dans ce cas, les solutions sont : $x_1 = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2}$.

VI Exponentielle et logarithme

1 - $t = \tau \ln 2$.

2 - $t = \tau \ln 100 \simeq 4,6\tau$.

VII Puissances

1 - $\frac{10^3 \times 10^{-10}}{(10^{-2})^3} = 10^{3-10+6} = 10^{-1}$

2 - $\frac{(10^4)^2 \times 10^{-34}}{(10^{-1})^2 \times (10^{0,5})^2} = 10^{8-34+2-1} = 10^{-25}$

3 - $\frac{\sqrt{10^3 \times 10^5}}{(10^8)^{1/4}} = 10^{8/2-8/4} = 10^2$

4 - x^{-3a}

5 - x^{2-4a}

6 - $x^{\frac{3}{2}}$

VIII Calculs de dérivées

IX Primitives et intégrales

Primitives

1 - $f(t) = \cos(\omega t)$

– Primitive : $F(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \frac{\omega \cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

2 - $f(t) = \sin(\omega t)$

– Primitive : $F(t) = -\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = -\frac{-\omega \sin(\omega t)}{\omega} = \sin(\omega t) = f(t)$, c'est correct.

3 - $f(t) = e^{at}$

– Primitive : $F(t) = \frac{1}{a} e^{at}$.

– Vérification : $F'(t) = \frac{1}{a} \times a e^{at} = e^{at} = f(t)$, c'est correct.

4 - $f(t) = e^{-t/\tau}$

– Primitive : $F(t) = -\tau e^{-t/\tau}$.

– Vérification : $F'(t) = -\tau \times \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau} = f(t)$, c'est correct.

5 - $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$

– Primitive : $F(t) = \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \frac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\omega} = \cos(\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

6 - $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$

– Primitive : $F(t) = \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{4\omega}$.

– Vérification : $F'(t) = \frac{4\omega \cos(4\omega t + \varphi)}{4\omega} = \cos(4\omega t + \varphi) = f(t)$, c'est correct.

7 - $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

– Primitive : $F(t) = 2\frac{t^4}{4} + 6\frac{t^3}{3} + 7\frac{t^2}{2} + t = \frac{t^4}{2} + 2t^3 + \frac{7t^2}{2} + t$.

– Vérification : $F'(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1 = f(t)$, c'est correct.

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes, qui correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux. À chaque fois, $T = 2\pi/\omega$.

8 -

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} dt &= \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{+\infty} \\ &= (-\tau e^{-(+\infty)/\tau}) - (-\tau e^{-0/\tau}) \\ &= \tau. \end{aligned}$$

9 - $\frac{1}{T} \int_0^T s_0 \cos(\omega t + \varphi) dt$.

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T s_0 \cos(\omega t + \varphi) dt &= \frac{1}{T} s_0 \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) dt \\
&= \frac{s_0}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\
&= \frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} (\sin(\omega T + \varphi) - \sin(\varphi)) \\
&= \frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} (\sin(2\pi + \varphi) - \sin(\varphi)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

10 - $\frac{1}{T} \int_0^T s_0 \sin(\omega t + \varphi) dt.$

Période $T = \frac{2\pi}{\omega}.$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T s_0 \sin(\omega t + \varphi) dt &= \frac{s_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) dt \\
&= \frac{s_0}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \right]_0^T \\
&= -\frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(\underbrace{\cos(\omega T + \varphi)}_{=2\pi} - \cos(\varphi) \right) \\
&= -\frac{s_0}{T} \frac{1}{\omega} \left(\underbrace{\cos(2\pi + \varphi)}_{=\cos \varphi} - \cos(\varphi) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

11 - $\frac{1}{T} \int_0^T s_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt.$

Pour obtenir la période il faut se débarrasser du carré en utilisant la formule

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1, \quad \text{soit donc} \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0^2 \frac{\cos[2(\omega t + \varphi)]}{2} + s_0^2 \frac{1}{2}, \\
&= \frac{s_0^2}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0^2}{2},
\end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}.$

Calculons ensuite l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \int_0^T s_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{s_0^2}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0^2}{2} \right) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{s_0^2}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{s_0^2}{2} dt \\
 &= \frac{1}{T} \frac{s_0^2}{2} \int_0^T \cos[2\omega t + 2\varphi] dt + \frac{1}{T} \frac{s_0^2}{2} \int_0^T dt \\
 &= \frac{s_0^2}{2T} \left[\frac{1}{2\omega} \sin[2\omega t + 2\varphi] \right]_0^T + \frac{s_0^2}{2T} (T - 0) \\
 &= \frac{s_0^2}{2T} \frac{1}{2\omega} \left(\underbrace{\sin[2\omega T + 2\varphi]}_{=2\pi} - \sin(2\varphi) \right) + \frac{s_0^2 T}{2T} \\
 &= \frac{s_0^2}{2T} \frac{1}{2\omega} \left(\underbrace{\sin[2 \times 2\pi + 2\varphi]}_{=\sin(2\varphi)} - \sin(2\varphi) \right) + \frac{s_0^2}{2} \\
 &= \frac{s_0^2}{2}
 \end{aligned}$$

12 - $\frac{1}{T} \int_0^T s_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt.$

On utilise cette fois :

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \text{soit donc} \quad \sin^2 x = -\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 s(t) &= -s_0^2 \frac{\cos[2(\omega t + \varphi)]}{2} + s_0^2 \frac{1}{2}, \\
 &= -\frac{s_0^2}{2} \cos[2\omega t + 2\varphi] + \frac{s_0^2}{2},
 \end{aligned}$$

et on voit donc qu'on a un signal harmonique (décalé) de période $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$.

Pour la valeur moyenne on reprend presque exactement les calculs du cas précédent, à un signe moins près mais sans importance car en facteur du terme nul. On a donc encore le résultat $\frac{s_0^2}{2}$.