Étude des systèmes linéaires
Chapitre 2

Oscillateur harmonique

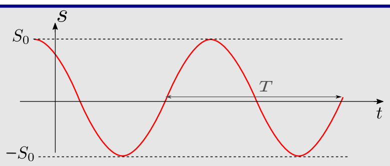
systèmes du second ordre non amortis

I Signal harmonique

$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$

pulsation $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

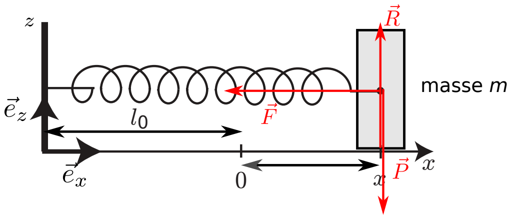
fréquence $f = 1/T$



amplitude S_0

phase à l'origine φ

II Le système masse-ressort décrit de façon idéale



1 - Description d'un ressort $\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}}$

2 - Bilan des forces, PFD

on aboutit à une équation de l'oscillateur harmonique :

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$

3 - Résolution

$x(t) = x_{\text{part}} + x_{\text{hom}}$ solution générale

$$\left| \begin{array}{l} x_{\text{part}} = \dots \\ x_{\text{hom}} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \end{array} \right.$$

+CI pour déterminer A et B

Tracé de la solution.
Amplitude, pulsation, période, fréquence.

4 - Étude énergétique

$$\left| \begin{array}{l} E_{p,\text{ress}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \\ E_{p,\text{pes}} = mgz \\ E_c = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right. \longrightarrow E_m = E_c + E_{p,\text{ress}} + E_{p,\text{pes}}$$

ppté : $E_m = \text{cst}$ si pas de dissipation

5 - D'autres CI ou repérages

III Étude du circuit LC idéal

TD

IV Le système masse-ressort vertical

TD

Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

►1 Quelle est l'écriture mathématique générale d'un signal harmonique ? Nommer les différents paramètres qui y interviennent. Tracer l'allure du signal.

►2 Quelle est la relation entre la pulsation et la fréquence ? et entre la pulsation et la période ?

——— (cours : II)

►3 Quelle est l'équation qui caractérise un oscillateur harmonique ?

►4 Comment s'écrivent ses solutions ?

►5 Comment s'écrit la force exercée par un ressort sur un objet accroché à une de ses extrémités ? On fera un schéma.

——— (cours : II.4 : énergie)

►6 Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

►7 Et celle de l'énergie potentielle associée au ressort ?

►8 Quelle est l'expression de l'énergie cinétique d'une masse m ?

►9 Quelle est l'expression de l'énergie mécanique ? Quelle propriété possède-t-elle si toutes les forces qui travaillent sont conservatives ?

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

►10 Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort. → **EC1**

►11 Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données. → **EC2**

▶12 Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.

▶13 Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort. → **EC3**

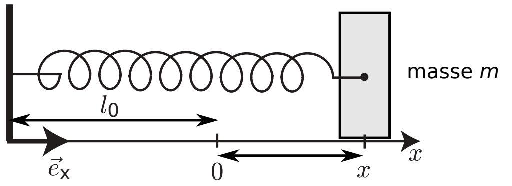
——————— (cours : II, III et de façon générale)

Les savoir faire précédents sont mobilisables dans d'autres situations où la modélisation aboutit à l'équation d'un oscillateur harmonique.

– Exemples : circuit LC (TD), masse-ressort vertical (TD, il faut alors savoir déterminer la position d'équilibre), etc...

Exercices de cours

Exercice C1 – Aboutir à l'équation du mouvement dans le cas du système masse-ressort



On considère le système ci-contre. On néglige tout frottement et on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le PFD, en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$. L'écrire sous forme canonique.

Correction :

1 - ⋆ Système : {masse}. Bilan des forces :

– Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.

– Réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_z$ (rien selon $\vec{e}_x$ car on ne tient pas compte des frottements).

– Force du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}}$ avec ici $l = l_0 + x$ (c'est la longueur totale du ressort) et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_x$ (va du point d'attache du ressort vers l'extérieur).
D'où $\vec{F} = -k((l_0 + x) - l_0)\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x$.

⋆ Accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$ car mouvement selon x uniquement.

⋆ PFD sur la masse : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$.

On projète sur $\vec{e}_x$ donc il reste $m\ddot{x} = -k\,x$, soit $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.}$

⋆ C'est du type "oscillateur harmonique" : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, avec ici $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Exercice C2 – Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données

On reprend le cas précédent et ses résultats, notamment l'équation satisfaite par $x(t)$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration.

2 - Alternative : Reprendre cette question en supposant cette fois que à $t = 0$, $x(0) = x_0 > 0$ et $v(0) = 0$.

Correction :

1 - ⋆ Solution générale $x(t) = x_H + x_P$.

– Solution particulière constante, donc $\ddot{x}_P = 0$, donc $+ + \omega_0^2 x_P = 0$ donc $x_P = 0$.

– Solution de l'équation homogène : $x_H(t) = A\cos\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$.

– Donc la solution générale est $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$.

⋆ Conditions initiales :

– CI 1 : $x(0) = 0$. Or $x(0) = A$ donc $A = 0$.
– CI 2 : $\dot{x}(0) = v_0$.
Il faut calculer $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$ puis prendre en $t = 0$: $\dot{x}(0) = B\omega_0$.
Donc $B\omega_0 = v_0$ donc $B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$.

⋆ Finalement : $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t.}$

2 - ⋆ Solution générale identique à la question précédente, car seules les CI changent : $x(t) = B = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t$.

⋆ Conditions initiales :
– CI 1 : $x(0) = x_0$. Or $x(0) = A$ donc $A = x_0$.
– CI 2 : $\dot{x}(0) = 0$.
Il faut calculer $\dot{x}(t) = ...$ (cf q1) puis prendre en $t = 0$: $\dot{x}(0) = B\omega_0$.
Or $v_0 = 0$ (pas de vitesse initiale), donc $B = 0$.

⋆ Finalement : $\boxed{x(t) = x_0 \cos\omega_0 t.}$

Exercice C3 – Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort

On reprend le cas de l'EC2 et ses résultats : le PFD a donné $m\ddot{x} = -kx$, dont la solution est $x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$. On se donne des conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

1 - Donner l'expression de l'énergie mécanique du système {masse et ressort} en fonction de $x(t)$, de $\dot{x}(t)$ et d'autres paramètres.

2 - Dériver par rapport au temps cette expression et montrer que l'énergie mécanique est bien conservée.

3 - Qu'est ce qui permettait de prédire cette conservation sans faire aucun calcul ?

Correction :

1 - ⋆ Énergie mécanique du système : $E_m = E_c + E_{p,\text{pes}} + E_{p,\text{ressort}}$.
Il y a en effet deux forces qui ont une énergie potentielle : celle du ressort et la pesanteur.
On sait que (cours) : $E_{p,\text{pes}} = mgz$ et on peut prendre $z = 0$ ici (l'altitude de la masse ne change pas) ; $E_{p,\text{ressort}} = \dfrac{1}{2}k(l - l_0)^2$.
Comme $l = x + l_0$, on a donc $E_{p,\text{ressort}} = \dfrac{1}{2}k\,x^2$.
Et d'autre part, $v = \dot{x}$ donc l'énergie cinétique s'écrit : $E_c = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Conclusion : $\boxed{E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}k\,x^2.}$

2 - $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2\right) + \dfrac{1}{2}k\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right)$.
Attention aux dérivées, elles sont du type $(u^2)' = 2uu'$.
Pour la seconde "$u = x$", donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2\,x\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x\dot{x}$.
Pour la première "$u = \dot{x}$", donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}^2\right) = 2\,\dot{x}\,\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = 2\dot{x}\ddot{x}$.
On a donc : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}\,(m\ddot{x} + kx) = 0$.
C'est nul car on a reconnu l'équation du mouvement déjà démontrée avec le PFD.
Conclusion : $E_m(t))$ est une constante.

Remarque : on peut aussi raisonner dans l'autre sens (mais ce n'est pas ce que demandait cet exercice) : partir du fait que $E_m = \text{cst}$, la dérivée, et en déduire que $m\ddot{x} + kx = 0$. C'est une alternative au PFD pour trouver l'équation du mouvement.

3 - Il n'y a pas de frottements : l'énergie est conservée.
(nous serons plus précis là-dessus dans le cours de mécanique)

Variantes : circuit LC (exercice II du TD) ou masse-ressort vertical (TD III)

Méthodes

Méthode 1 : Comment obtenir l'équation du mouvement pour un problème de mécanique ?
Revoir la fiche de début du chapitre sur la mécanique (chapitre 1).

Exemple dans ce chapitre : le I.2 du cours pour le système masse-ressort horizontal.

Méthode 2 : Comment obtenir l'équation la grandeur voulue pour un problème électrique ?
Revoir la fiche de début du chapitre sur l'électronique.

Exemple dans ce chapitre : le TD sur l'oscillateur LC

Méthode 3 : Comment obtenir les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?
Équation du type $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha}$ avec α une constante.

- On écrit la forme générale des solutions : $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t)$, avec
  - x_{part} solution particulière, constante ici, donc $\ddot{x}_{\text{part}} = 0$ et l'équation donne $0 + \omega_0^2 x_{\text{part}} = \alpha$, soit $x_{\text{part}} = \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$. (donc si $\alpha = 0$ alors $x_{\text{part}} = 0$)
  - x_{hom} solution de l'équation homogène, $\boxed{x_{\text{hom}}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$ (forme à connaître par cœur) avec A et B des constantes à déterminer.

  Donc on a
$$\boxed{x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{\alpha}{\omega_0^2}.} \tag{1}$$

- On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales. Par exemple supposons que :
$$x(0) = x_0 \quad \text{(CI 1)}$$
$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \text{(CI 2)}$$

  On raisonne sur la solution *complète* (équation (1) ci dessus).
  - CI 1 : D'après la solution, $x(0) \overset{\text{sol}}{=} A + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$.
    Or $x(0) \overset{\text{CI}}{=} x_0$.
    On en déduit $A + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2} = x_0$, d'où $A =$...
  - CI 2 : On calcule $\dot{x}(t) = \left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}\right) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$.
    Puis on prend la valeur en $t = 0$: $\dot{x}(0) \overset{\text{sol}}{=} B\omega_0$.
    Or $\dot{x}(0) \overset{\text{CI}}{=} v_0$.
    On en déduit $B\omega_0 = v_0$, d'où $B =$...

Méthode 4 : trouver les CI en électricité

- Identifier les condensateurs et bobines.
- Étudier le circuit à $t = 0^-$ (donc à $t < 0$, en général les générateurs sont éteints, le régime est permanent).
  En déduire $u_{\text{condensateur}}(0^-)$ pour chaque condensateur et $i_{\text{bobine}}(0^-)$ pour chaque bobine.
- On en déduit $u_{\text{condensateur}}(0^+)$ pour chaque condensateur et $i_{\text{bobine}}(0^+)$ pour chaque bobine
  (ce sont les mêmes qu'à 0^- car $u_{\text{condensateur}}$ et i_{bobine} fonctions contines de t).
  Si besoin on en déduit les autres courants et tensions à 0^+ avec la loi des mailles ou des nœuds.

- Si besoin des dérivées à 0^+, attention car elles n'ont pas de raison de valoir la même chose qu'à 0^-.

  Utiliser des relations comme $\frac{\mathrm{d}u_{\text{condensateur}}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i_{\text{condensateur}}(0^+)}{C}$ (avec $i_{\text{condensateur}}(0^+)$ déterminé à l'étape précédente) ;

  ou $\frac{\mathrm{d}i_{\text{bobine}}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{u_{\text{bobine}}(0^+)}{L}$ (avec $u_{\text{bobine}}(0^+)$ déterminé à l'étape précédente).

Exemple : le TD sur l'oscillateur LC

Morceaux du cours

I – Signal harmonique

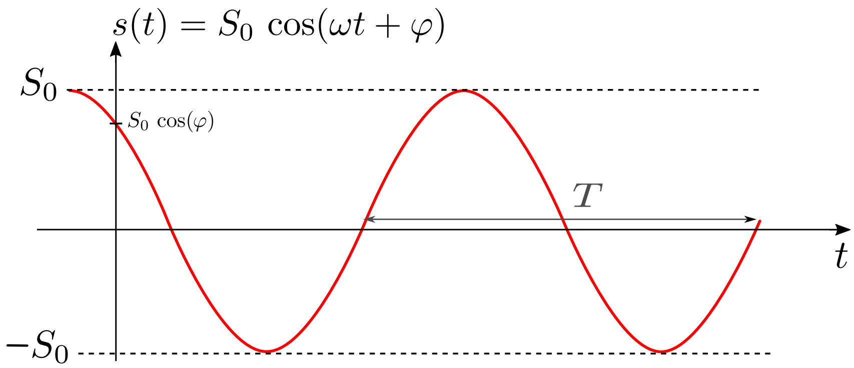
Définition

Signal harmonique : signal s'écrivant comme

$$s(t) = S_0\,\cos(\omega t + \varphi).$$

Avec :

- S_0 l'amplitude,
- ω la pulsation (unité S.I. : radian par seconde, rad/s),
- φ la phase à l'origine (unité S.I. : radian) ; elle donne la valeur initiale du signal : $s(0) = S_0\cos(\varphi)$. Elle est définie à 2π près.



Lien entre période T, fréquence f et pulsation ω

On a $f = \frac{1}{T}$ et $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Démonstration : $f = 1/T$ est une définition.
Par contre l'égalité $T = 2\pi/\omega$ peut se démontrer : $\cos(\omega(t + 2\pi/\omega) + \varphi) = \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$, cqfd.

Autres écritures :

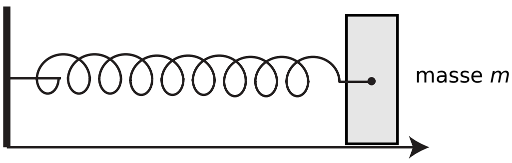
- $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$
- $s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (même ω dans le cos et dans le sin)

Par abus de langage, on dit aussi parfois qu'un signal $s(t) = S_1 + S_0\,\cos(\omega t + \varphi)$ est aussi un signal harmonique, même s'il y a présence d'un terme constant S_1.

Une animation permettant de faire varier les paramètres : https://www.geogebra.org/m/xvtS8qV8.

II – Le système masse-ressort décrit de façon idéale (sans frottements)

Dans toute la partie I, nous étudions l'exemple du système masse-ressort horizontal :



- La masse m glisse sur un plan.
- À l'équilibre, le ressort n'est ni étiré ni comprimé $\rightarrow$ on note l_0 sa longueur à vide (donc au repos).
- À $t=0$ le ressort est à l'équilibre, et on donne une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ à la masse.

Hypothèses :

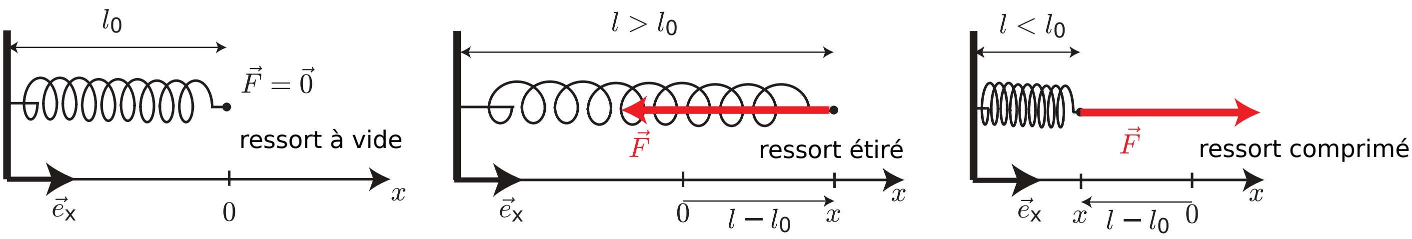
- On néglige tout frottement.
- Référentiel d'étude galiléen.

1 – Description d'un ressort

Modèle simplifié du ressort à spires (non jointives), de masse négligeable. Notations :

- Longueur à vide : l_0.
- Longueur totale : l.
- L'allongement du ressort est par définition : $\Delta l = l - l_0$.

Action du ressort :



- Si $l = l_0$, pas de force.
- Si $l > l_0$, ressort étiré, force qui rappelle M vers le point d'attache.
- Si $l < l_0$, ressort comprimé, force qui pousse M.

Force exercée par un ressort

La force exercée sur un point M accroché à l'extrémité est proportionnelle à l'allongement $\Delta l = l - l_0$ du ressort :

$$\boxed{\vec{F} = -k(l-l_0)\,\vec{u}_{\text{ext}},}$$

avec $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé du point d'attache vers la masse M.

2 – Bilan des forces et PFD

$\rightarrow$ **EC1**

3 – Résolution de l'équation

$\rightarrow$ **EC2**

4 – Étude énergétique

Notions sur l'énergie en mécanique

Énergie mécanique d'un système :

$$E_m = \underbrace{E_c}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{E_p}_{\text{énergie potentielle}} .$$

Théorème : en l'absence de frottement, l'énergie mécanique est constante, $E_m = \text{cst}$.

$$\text{On a alors } \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Expressions des énergies

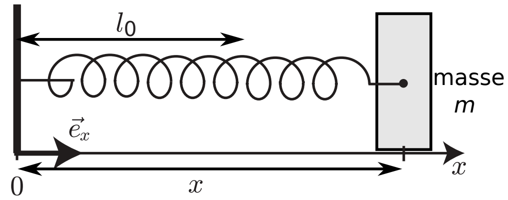
- Énergie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$
- Énergie potentielle : une par force, $E_p = E_{p,\text{pes}} + E_{\text{pressort}}$,
- $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz$ énergie potentielle de pesanteur.
  Signe + si l'axe z est vers le haut, signe − si l'axe z est vers le bas.
- $\boxed{E_{\text{pressort}} = \dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2}$ énergie potentielle élastique du ressort.

Remarque : $x(t)$ est une fonction du temps. On a alors : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}t} = 2\,x\,\dot{x},}$ et aussi $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,\dot{x}^2}{\mathrm{d}t} = 2\,\dot{x}\,\ddot{x}.}$

→ **EC3**

5 – Un autre exemple de repérage

On change la façon de repérer la position de la masse :



→ Établir l'équation différentielle portant sur $x(t)$.