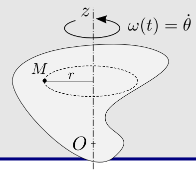
Introduction à la mécanique du solide

I Mouvement d'un solide (cinématique)

1 - Définition d'un solide
indéformable

2 - Mouvement de translation
l'orientation reste fixe
cas part.
- Translation rectiligne
- Translation circulaire

3 - Mouvement de rotation autour d'un axe fixe
a/ Définition
b/ Vitesse d'un point du solide
$\vec{v}(M) = r\omega\,\vec{e}_\theta$



II PFD pour un système (dynamique)

1 - Centre d'inertie d'un système (*G*)
= barycentre des masses
ex. si 2 points : $(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$

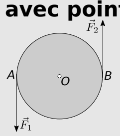
2 - Quantité de mouvement d'un système
$\vec{p} = m\vec{v}(G)$

3 - Théorème de la résultante dynamique pour un système
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$$
résultantes des forces extérieures

III Solide en rotation : approche avec le théorème du moment cinétique

1 - Moment cinétique d'un solide
axe Δ fixe : $\sigma_\Delta = J_\Delta\,\omega = J_\Delta\,\dot\theta$
moment d'inertie

2 - Moment d'une action mécanique sur un solide
a/ Cas d'une force avec point d'application M **:** $\Gamma_{Oz} = (\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F})\cdot\vec{e}_z$
b/ Couple
résultante nulle
moment *C*



c/ Liaison pivot
parfaite $\Rightarrow$ moment nul selon son axe

3 - Théorème du moment cinétique
- axe *Oz* fixe ET - réf. galiléen
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{0z}(\vec{F}_i)$$
moments et couples externes

4 - Application : pendule pesant

IV Solide en rotation : approche avec le théorème de l'énergie cinétique

1 - Énergie cinétique
rotation autour axe Δ fixe : $E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\,\dot\theta^2$

2 - Puissance d'une action mécanique sur un solide
Force avec point d'application M : $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}(M)$
Liaison pivot parfaite $\Rightarrow$ puissance nulle

3 - Théorème de l'énergie cinétique
axe *Oz* fixe ET - réf. galiléen
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$
actions externes

V Approche énergétique dans le cas d'un système déformable

1 - Différences avec le cas du solide
PFD et TMC : pas de changement
TEC : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$ actions externes **et internes**

2 - Exemple du "tabouret d'inertie"
cf TD

Ce qu'il faut connaître

——— (cours : I)

►1 Quelle est la définition d'un solide (sous-entendu indéformable ou idéal) ?

——— (cours : II)

►2 Quelle est la définition du centre d'inertie G (ou centre de masse) d'un système de points ? (→ c'est le barycentre des masses)

Donner la relation mathématique dans le cas d'un système de deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 (→ $\overrightarrow{OG} = [m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}]/[m_1+m_2]$).

►3 Comment est définie la quantité de mouvement d'un système de points M_1, ..., M_N ? (→ c'est la somme des quantités de mouvement de chaque point)

Comment s'exprime plus simplement cette quantité de mouvement du système, en fonction notamment de la vitesse de son centre d'inertie G ? (→ $\vec{p} = m\vec{v}(G)$)

►4 Comment s'énonce le théorème de la résultante dynamique pour un solide (ou pour un système en général) ?

——— (cours : III)

►5 Comment s'écrit le moment cinétique d'un solide par rapport à un axe Δ, étant donné sa vitesse angulaire et son moment d'inertie par rapport à cet axe ?

▶6 Comment est défini, lorsqu'il existe, le point d'application d'une force ?

▶7 Quelle est la définition d'un couple ? ($\rightarrow$ action mécanique dont la résultante est...)

▶8 Que peut-on dire lorsqu'une liaison pivot est supposée parfaite ? (en termes de moment et de puissance)

▶9 Comment s'énonce le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ?

——— (cours : IV)

▶10 Comment s'écrit l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe, étant donné sa vitesse angulaire et son moment d'inertie par rapport à cet axe ?

▶11 Comment s'énonce le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe ?

Ce qu'il faut savoir faire

——— (cours : I)

▶12 Pour un solide, savoir reconnaître un mouvement de translation (et les cas particuliers de translation rectiligne ou circulaire) ainsi qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

▶13 Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe, à la vitesse angulaire ω, M un point du solide et R la distance entre M et l'axe. Comment s'exprime la vitesse $\vec{v}$ du point M ?

——— (cours : III)

▶14 Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.

▶15 Utiliser le théorème du moment cinétique pour étudier un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. $\rightarrow$ **EC1**,**EC2**

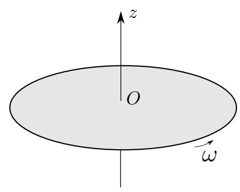
——— (cours : IV)

▶16 Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour étudier un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. $\rightarrow$ **EC3**

Exercices de cours

Exercice C1 – Application du TMC dans le cas d'un seul couple

On considère un disque en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe implique un couple de frottement noté C, proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ω : $C = -\alpha\omega$ avec α pris constant. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz.



1 - Quel est le signe de α ?

2 - Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

3 - La résoudre en supposant qu'on lance le disque avec une vitesse angulaire initiale ω_0.

Correction :

1 - Le couple de frottement est résistif. Si $\omega > 0$, alors le disque tourne dans le sens direct autour de l'axe, et le couple C doit donc être négatif pour empêcher cette rotation directe, donc il faut $C < 0$.

Conclusion : $\boxed{\alpha > 0.}$

2 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen.

⋆ Bilan des actions mécaniques : il n'y a que l'action de la liaison pivot, de couple C.

⋆ Moment cinétique par rapport à l'axe Oz : $\sigma_{Oz} = J\omega$.

⋆ Théorème du moment cinétique :

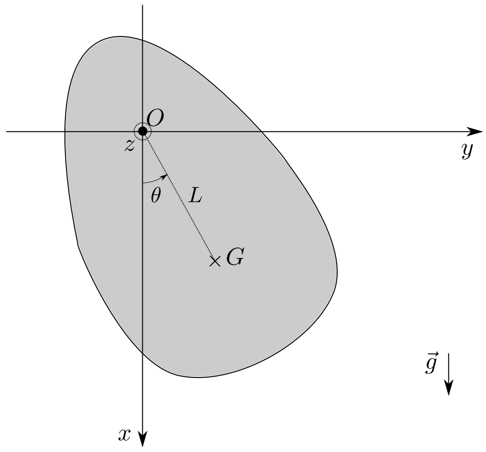
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = C, \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = -\alpha\omega, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{J}\omega(t).}$$

3 - Solution : $\omega(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{J}t}$ avec A constante d'intégration, que l'on détermine grâce à la CI $\omega(0) = \omega_0$, d'où $A = \omega_0$, et

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{J}t}.}$$

Exercice C2 – Pendule pesant, méthode avec le TMC

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe est supposée parfaite. G est le centre d'inertie du solide. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz, et m_{tot} sa masse totale.



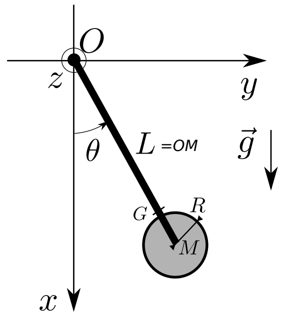
1 - Appliquer le théorème du moment cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

2 - On se place dans l'approximation des oscillations de petite amplitude. Donner l'expression de la pulsation du mouvement.

Comparaison avec le modèle du pendule simple (ponctuel) (facultatif en colle) :

On propose ici de faire le lien avec les résultats trouvés dans les chapitres précédents sur le pendule.
Concrètement, on peut prendre une forme particulière pour le pendule : une tige rigide de masse m et longueur L maintient une masse en forme de disque de rayon R et masse M (cf second schéma).
Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe Oz est alors donné par :

$$J = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2 + ML^2}_{\text{contribution masse M}} + \underbrace{\frac{1}{3}mL^2}_{\text{contribution tige}} . \tag{1}$$



3 - Montrer que si $m_{\text{tot}} \simeq M$ et $J \simeq ML^2$, alors on obtient $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, ce qui est la pulsation que nous avions obtenue dans les chapitres précédents pour le pendule simple (pendule simple = tige de masse nulle ou ficelle, et masse M ponctuelle).

4 - Reprendre l'expression de J écrite plus haut (équation 1). À quelles conditions sur m (masse de la tige) et R (rayon de la masse suspendue) a-t-on effectivement $J \simeq ML^2$?

Conclusion : si $m \ll M$ (tige légère) et $R \ll L$ (masse de petite taille), alors $J \simeq ML^2$ et $m_{\text{tot}} \simeq M$, G est confondu avec M, et on retrouve les résultats du pendule ponctuel.

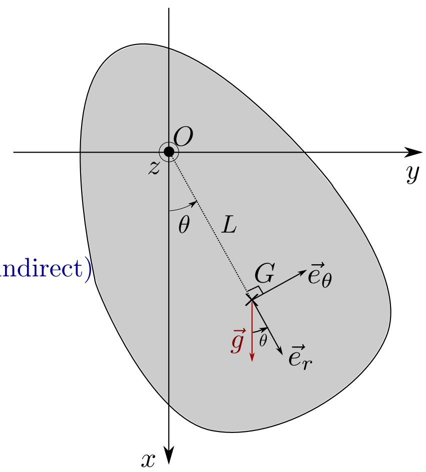
Correction :

1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen.

⋆ Bilan des actions mécaniques :

– La liaison pivot, parfaite donc moment par rapport à l'axe Oz nul.

– La pesanteur, de moment par rapport à l'axe Oz donné par



$$\begin{aligned}\Gamma_{Oz} &= (\overrightarrow{OG} \wedge m_{\text{tot}}\vec{g}) \cdot \vec{e}_z \\ &= (L\vec{e}_r \wedge m_{\text{tot}} g \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z \\ &= (-L m_{\text{tot}} g \sin\theta \, \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z \quad \text{(signe moins car fait tourner dans le sens indirect)} \\ &= -L m_{\text{tot}} g \sin\theta\end{aligned}$$

⋆ Moment cinétique par rapport à l'axe Oz : $\sigma_{Oz} = J\dot{\theta}$.

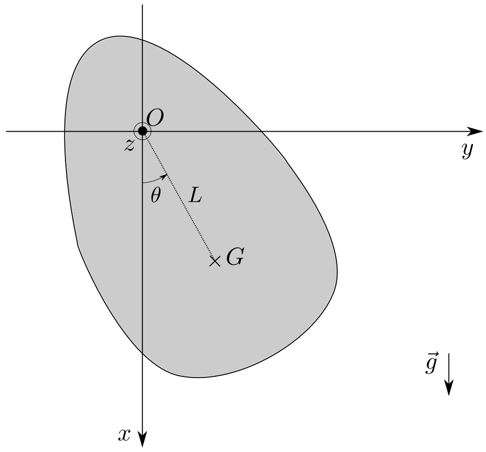
⋆ Théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{Oz}, \text{ donc } \frac{\mathrm{d}J\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -m_{\text{tot}} L g \sin\theta, \text{ donc } \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_{\text{tot}} L g}{J}\sin\theta = 0.}$$

2 - Si $\theta \ll 1\,\text{rad}$, alors on a $\ddot{\theta} + \frac{m_{\text{tot}} L g}{J}\theta = 0$, équation de l'oscillateur harmonique où la pulsation est $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} L g}{J}}.}$

3 - $\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} L g}{J}} = \sqrt{\frac{M L g}{M L^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}.$

Exercice C3 – Pendule pesant, méthode avec le TEC



On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz. La liaison pivot selon cet axe est supposée parfaite. G est le centre d'inertie du solide. Le référentiel d'étude est supposé galiléen. On note J le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz, m sa masse.

1 - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique afin de trouver l'équation du mouvement.

2 - On se place dans l'approximation des oscillations de petite amplitude. Donner l'expression de la pulsation du mouvement.

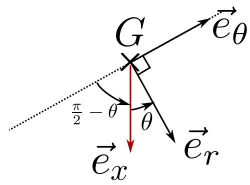
Correction :

1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen.

⋆ Bilan des actions mécaniques :

– La liaison pivot, parfaite donc puissance nulle : $\mathcal{P}(\text{pivot}) = 0$.

– La pesanteur, de puissance :



$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = \cos\theta$$
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(m\vec{g}) &= m\vec{g}\cdot\vec{v}(G) = mg\vec{e}_x \cdot L\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= -mgL\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{(cf schéma)}\end{aligned}$$

⋆ Énergie cinétique de rotation : $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.

⋆ Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(m\vec{g}) + \mathcal{P}(\text{pivot}), \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}J\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = -mgL\dot{\theta}\sin\theta.$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = 2\ddot{\theta}\dot{\theta}$, donc en simplifiant par $\dot{\theta}$ on obtient $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{mLg}{J}\sin\theta = 0.}$

2 - Si $\theta \ll 1\,\text{rad}$, alors on a $\ddot{\theta} + \dfrac{mLg}{J}\theta = 0$, équation de l'oscillateur harmonique où la pulsation est $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mLg}{J}}.}$

Cours

On dit qu'une tartine beurrée tombe toujours avec le côté beurré au sol. Comment mettre en équation un tel problème de physique ?

Avec les chapitres précédents nous ne pouvions pas, car nous nous sommes intéressés à la dynamique de points matériels. Modéliser la tartine par un point matériel et appliquer le PFD permet de connaître la trajectoire de son centre de masse, mais nous perdons toute information sur la rotation de la tartine sur elle-même.

L'objectif du présent chapitre est donc d'étendre la mécanique à des *solides* (donc non ponctuels).

Il s'agit d'une introduction, et vous voyez/verrez à ce sujet bien plus de choses en SII.

I – Mouvement d'un solide (cinématique)

1 – Définition d'un solide

On parle de "système" pour désigner un objet ou ensemble d'objets, auquel on peut appliquer les principes de la mécanique. Par exemple : une roue, une voiture, une balle, un lampadaire...

En général un système est déformable (s'il est constitué de plusieurs pièces mobiles).

Définition : solide

Un solide (sous-entendu : indéformable) est un système dont tous les points restent à distance constante les uns des autres.

Il s'agit d'un modèle idéal. C'est aux solides qu'on s'intéresse dans cette partie I.

2 – Mouvement de translation

Définition : mouvement de translation

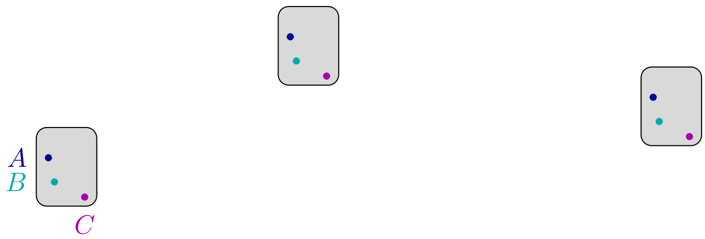
Un solide est en mouvement de **translation** si son <u>orientation est fixe</u> au cours du mouvement.

On peut formuler ceci de trois façons équivalentes :

- Pour tous points A et B du solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement.
- Au cours du mouvement, les trajectoires de chacun de points du solide sont les mêmes mais décalées les unes par rapport aux autres.
- À chaque instant, quels que soient les points A et B du solide, $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$.

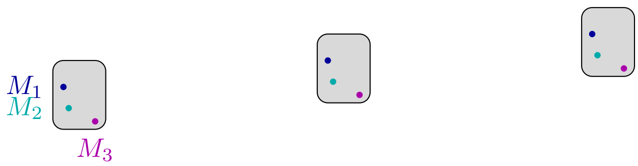
Remarque : la nature du mouvement dépend bien sûr du référentiel dans lequel il est décrit.

Exemple : le solide ci-dessous suit un mouvement de translation.

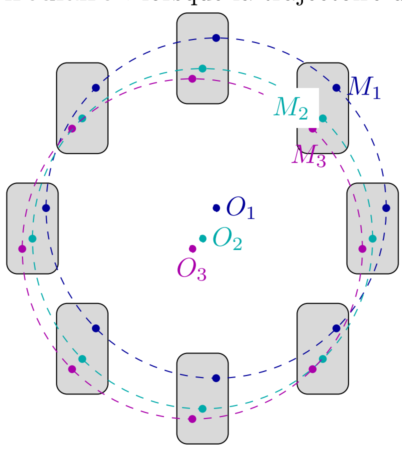


Deux cas particuliers de translations :

- **Translation rectiligne :** lorsque la trajectoire de chaque point du solide est une droite.



- **Translation circulaire :** lorsque la trajectoire de chaque point du solide est un arc de cercle.



Exemple : chaque nacelle est en translation circulaire.

Attention, c'est une translation donc le solide ne tourne pas sur lui-même : son orientation reste fixe.
De plus, les rayons des cercles sont les mêmes, mais pas les centres.

3 – Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

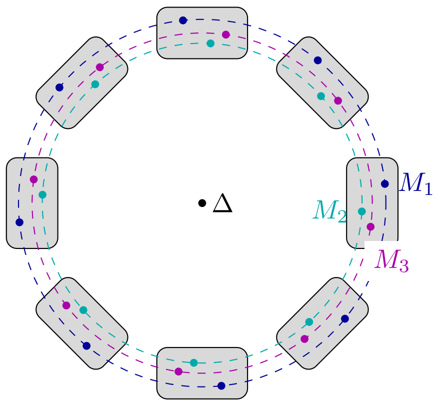
a/ Définition du mouvement

Définition : rotation autour d'un axe fixe

Soit Δ un axe fixe.

Un solide est en **rotation** autour de Δ si la trajectoire de chacun de ses points est un cercle dont le centre est sur l'axe.

De façon équivalente : la distance entre un point du solide et l'axe Δ reste constante au cours du temps.

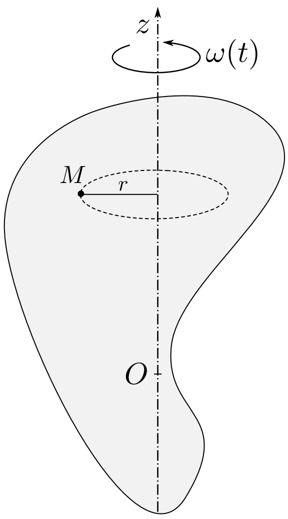


Exemple : l'ensemble du manège est en rotation autour de l'axe central.

Autre exemple : un pendule (cf schéma de l'**EC2**) est en rotation autour de son axe.

b/ Vecteur vitesse d'un point du solide

Coordonnées cylindriques d'axe Oz = l'axe de rotation.
Soit un point M du solide, de coordonnées (r,θ,z).



Propriétés sur les vitesses d'un solide en rotation

→ On appelle **vitesse angulaire** le paramètre $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}$ [rad/s].

- La vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ ne dépend pas du point M considéré.
  On peut parler de LA vitesse angulaire du solide.
- Le vecteur vitesse d'un point M du solide est tangent au cercle décrit par M, de norme $r|\omega|$ avec r la distance à l'axe.

Démonstration :

- Point 1 : évident.
- Point 2 : $\rightsquigarrow_1$ Utiliser les coordonnées cylindriques d'axe Δ : $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.
  Or ici $r = $ cst et $z = $ cst, donc on a $\vec{v}(M) = r\omega\vec{e}_\theta$, ce qui prouve ce qu'il faut.

II – PFD pour un système (dynamique)

Dans cette partie II, on considère un système, qui peut être un solide ou non (donc qui peut être déformable).

1 – Centre d'inertie d'un système

Définition du centre d'inertie d'un système

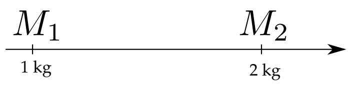
Le centre d'inertie (ou centre de masse) d'un système, noté G, est le barycentre des masses du système.

Exemples (seule la formule encadrée dans le cas de deux points est à connaître) :

- Dans le cas de deux masses m_1 et m_2 situées en M_1 et M_2, le centre d'inertie vérifie

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2},}$$

où O est l'origine du repère que l'on place où cela nous arrange.

> **Exemple :** on considère une masse $m_1 = 1\,\text{kg}$ en M_1 et une masse $m_2 = 2\,\text{kg}$ en M_2.
> $\rightsquigarrow_2$ Trouver la position de G.
> (indication : placer le point O où cela nous arrange, en M_1 par exemple, puis utiliser la relation ci-dessus)
>
> 
>
>
> **Réponse :** on place O au point M_1.
>
> Par définition on a $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$.
>
> Or ici $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$, donc on a $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OM_2} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM_2}$, donc G est à deux tiers du segment $[M_1M_2]$.

Remarque : le centre d'inertie vérifie aussi $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$.
Cette relation, et celle encadrée ci-dessus, sont les deux façons de définir un barycentre. On passe de cette dernière à celle encadrée en introduisant le point O et en utilisant Chasles : $m_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1}) + m_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_2}) = \vec{0}$, etc...

- (pas à savoir) Dans le cas de N masses m_1, ..., m_N, situées en M_1, ..., M_N,
on pose $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$. On note O l'origine fixe du repère.
Le centre d'inertie est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}}\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}$$

- (pas à savoir) Dans le cas d'un solide, il faut le découper en petits morceaux, chacun centré sur un point M et de masse infinitésimale $\mathrm{d}m$. On remplace alors la somme ci-dessus par une intégrale :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}}\int_{M\in\text{solide}} \mathrm{d}m\,\overrightarrow{OM}.$$

2 – Quantité de mouvement d'un système

Rappel : la quantité de mouvement <u>d'un</u> point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)$ est : $\vec{p} = m\vec{v}(M)$.

Quantité de mouvement d'un système

Définition : la quantité de mouvement d'un système est la somme des quantités de mouvement de tous ses points.

Propriété : cette quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = m\vec{v}(G),$$

avec m la masse totale du système, et $\vec{v}(G)$ la vitesse du centre d'inertie du système.

Ainsi pour la quantité de mouvement, tout se passe comme si toute la masse du système était concentrée au point G, avec une vitesse $\vec{v}(G)$.

Démonstration de la propriété dans le cas d'un système de deux points matériels :

Notons $m = m_1 + m_2$ la masse totale, et $\vec{p}$ la quantité de mouvement totale (donc la somme de $m_1\vec{v}_1$ et de $m_2\vec{v}_2$). On a :

$$\vec{p} = m_1 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}_{=(m_1+m_2)\overrightarrow{OG}}\right)$$

$$= (m_1+m_2)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}(G).$$

La démonstration pour un système quelconque de N points est similaire.

3 – Théorème de la résultante dynamique pour un système

(aussi appelé loi de la quantité de mouvement, théorème de la résultante cinétique, théorème du centre d'inertie, PFD pour un système, etc...)

Théorème de la résultante dynamique pour un système

Soit un système (déformable ou solide). On note G son centre d'inertie, m sa masse totale (constante), et $\sum_i \vec{F}_i$ la somme des résultantes des actions *extérieures* au système qui s'appliquent sur lui.
On a :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Attention, seules les forces extérieures interviennent. Les forces internes au système (qu'une partie du système exerce sur une autre partie du système) n'interviennent pas.

Remarques : théorème admis. La démonstration consisterait à appliquer le PFD à chaque point du système et à sommer tous ces PFD. Les forces internes se simplifient à cause du principe des actions réciproques, et on a le résultat. (Cf version corrigée du poly pour les curieux.)

Démonstration (hors programme et pas dans le poly élève) :

On décompose le système en N petites masses quasi ponctuelles. La masse numéro k est soumises à des forces extérieures de résultante $\vec{F}_{\mathrm{ext}\to k}$, et aussi à des forces de la part des autres masses au sein du système, dont la somme s'écrit $\sum_{j=1}^N \vec{F}_{j\to k}$ ($\vec{F}_{j\to k}$ est la force qu'exerce la masse j sur la masse k, avec par convention $\vec{F}_{k\to k} = \vec{0}$). Ainsi le PFD sur cette masse ponctuelle m_k donne :

$$m_k\frac{\mathrm{d}\vec{v}_k}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{ext}\to k} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{j\to k}.$$

Ensuite on somme ces PFD pour k allant de 1 à N :

$$\sum_{k=1}^N m_k\frac{\mathrm{d}\vec{v}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{\mathrm{ext}\to k} + \sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \vec{F}_{j\to k}.$$

- On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^N m_k\frac{\mathrm{d}\vec{v}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^N m_k\vec{v}_k = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\underbrace{\sum_{k=1}^N m_k\overrightarrow{OM_k}}_{=m\overrightarrow{OG}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t}.$
- De plus, $\sum_{k=1}^N \vec{F}_{\mathrm{ext}\to k}$ représente l'ensemble des forces extérieures qui s'appliquent sur le système, qu'on a noté plus haut par $\sum_i \vec{F}_i$.
- Et enfin les forces internes donnent : $\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \vec{F}_{j\to k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ppe actions réciproques}}}{=} -\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \vec{F}_{k\to j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chgt d'indices}}}{=} -\sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N \vec{F}_{j\to k}.$

  Cette somme est égale à son opposée, donc elle est nulle : $\sum_{k=1}^N\sum_{j=1}^N \vec{F}_{j\to k} = \vec{0}$.

On obtient bien le PFD énoncé dans l'encadré.

Remarque : ainsi pour le PFD, tout se passe comme si on avait un point matériel G de masse m.
Le centre d'inertie G est donc le point où est concentrée toute la masse du système pour ce qui concerne le PFD.

C'est aussi en ce point que s'applique la résultante du poids, d'où son autre nom : centre de masse.

III – Solide en rotation : approche avec le théorème du moment cinétique

Dans cette partie III, on considère un solide, en rotation autour d'un axe fixe.

$\leadsto_3$ **Rappel :** pour un point matériel (donc ponctuel) de masse m et vitesse $\vec{v}$, donner les expressions du moment cinétique par rapport à un axe Oz, du moment d'une force $\vec{F}$, et le théorème du moment cinétique.

$\sigma_{Oz} = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z$, $\quad \Gamma_{Oz}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)$.

Voyons comment ceci se généralise à un solide en rotation.

1 – Moment cinétique et moment d'inertie d'un solide

Dans le cas d'un système de points M_i de masses m_i, le moment cinétique de l'ensemble (par rapport à un axe) est donné par la somme des moments cinétiques de chaque point :

$$\sigma_{Oz} = \sum_i \sigma_{Oz}(M_i).$$

Nous allons voir que dans le cas d'un solide, ceci peut s'exprimer simplement.

a/ Moment cinétique

Moment cinétique

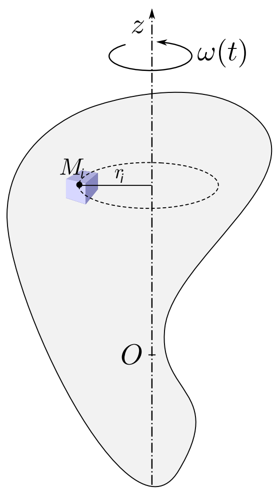
Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω.

Son moment cinétique par rapport à Δ s'écrit

$$\boxed{\sigma_\Delta = J_\Delta \omega,}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (unité S.I. : $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$).

Démonstration (n'est pas à savoir refaire) :



Prenons $\Delta = Oz$ (orienté par $\vec{e}_z$).

Pour obtenir le moment cinétique du solide, on le découpe en morceaux centrés sur des points M_i, chacun de masse m_i, et on considère chaque morceau comme une masse ponctuelle.

Comme le solide est en rotation autour de l'axe, $r_i = \mathrm{cst}$ et $\vec{v}(M_i) = r_i\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, avec $\dot{\theta}$ identique pour tous les points.

Le moment cinétique de la masse M_i par rapport à cet axe est

$$\sigma_{Oz}(M_i) = (\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}(M_i)) \cdot \vec{e}_z = (r_i\vec{e}_r \wedge m_i r_i\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = m_i r_i^2\,\dot{\theta}.$$

Le moment cinétique du solide est la somme des moments cinétiques des points M_i :

$$\sigma_{Oz} = \sum_i \sigma_{Oz}(M_i) = \sum_i m_i r_i^2\,\dot{\theta} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\dot{\theta} = J_{Oz}\dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \boxed{J_{Oz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right).}$$

b/ Moment d'inertie

On a obtenu dans la démonstration ci-dessus l'expression du moment d'inertie J_{Oz}.

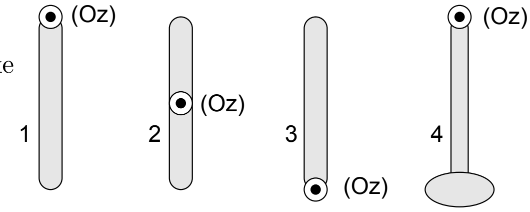
– Il dépend de l'axe par rapport auquel il est défini.

– Il rend compte de la répartition de la masse du solide autour de l'axe, et de la difficulté à mettre en rotation le solide (ou à arrêter sa rotation).

On voit sur la formule que plus la masse est répartie loin de l'axe, plus il est important (termes en r_i^2).

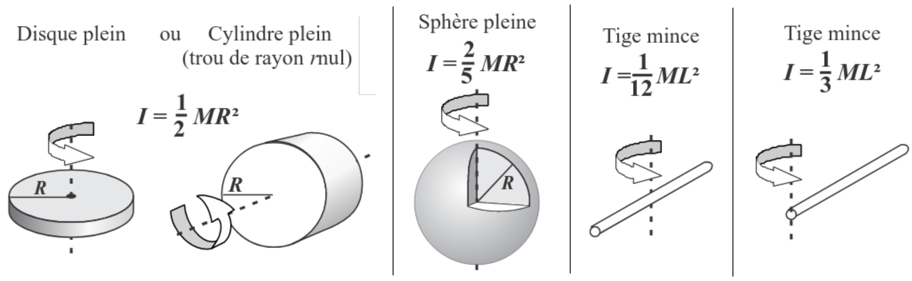
$\rightsquigarrow_4$ Classer les moments d'inertie des solides ci-contre, par rapport à l'axe Oz, du plus petit au plus grand.

Par rapport à l'axe Oz, on a : $J_2 < J_1 = J_3 < J_4$.



Ci-contre exemples de moment d'inertie pour des formes simples (pas à connaître).

(La masse volumique est supposée uniforme.)



Remarque : dans un énoncé, l'expression du moment d'inertie est toujours donnée. En SII, vous voyez comment le calculer par combinaison de moments d'inertie pour des formes simples. Pour une forme quelconque, ou une masse volumique non uniforme, il faut utiliser la formule $J_{Oz} = \sum_i m_i r_i^2$, en remplaçant la somme par une intégrale.
Enfin, le théorème de Huygens (qui n'est pas au programme de physique) permet d'obtenir le moment d'inertie par rapport à un axe Δ parallèle et à une distance d d'un axe passant par le centre d'inertie : $J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$ (m masse de l'objet).

Remarque : pour un point M (ponctuel), on obtient $J_{Oz} = mr^2$ et donc un moment cinétique $mr^2\dot{\theta}$. C'est bien la même chose qu'en mécanique du point !

2 – Moment d'une action mécanique sur un solide

La notion de force est pertinente pour un point matériel M. Il n'y a pas d'ambiguïté : la force $\vec{F}$ s'applique sur le point M. Puis on peut calculer son moment par rapport à un point A : $\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$.

Les choses sont plus compliquées pour un système ou un solide. On parle plutôt d'**action mécanique**. Par exemple l'action de la pesanteur sur le solide, ou une action de contact (forces de pression, action d'un ressort attaché sur le solide, d'une liaison pivot, action de contact sur un plan, etc...).

Une action mécanique est caractérisée par un torseur, défini en un point A quelconque par sa résultante $\vec{F}$ (indépendante du point A) et son moment $\vec{\Gamma}_A$ en A : $\tau = \{\vec{F}, \vec{\Gamma}_A\}_A$.

a/ Moment d'une force avec point d'application

Le **point d'application** de l'action mécanique est le point M où le moment s'annule (si ce point d'application existe, alors le professeur de SII appellera ce torseur un "glisseur").

Moment d'une force avec point d'application

Soit $\vec{F}$ une résultante, et M son point d'application (on suppose qu'il existe).

Son moment par rapport à un axe Oz, orienté par $\vec{e}_z$, est

$$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z.}$$

En effet, on a (toujours, qu'il existe un point d'application ou pas) la relation de Varignon (pas au programme de physique) :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\Gamma}_M + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}.$$

Dans le cas particulier où M est le point d'application (qu'on suppose exister), alors $\vec{\Gamma}_M = \vec{0}$, d'où $\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

On a donc finalement les mêmes formules que pour un point matériel, et les mêmes méthodes de calcul. (mais pour un point matériel ce sont des définitions, alors qu'ici il s'agit d'une propriété)

Remarque : ceci vaut pour une action qui possède un point d'application (où le moment s'annule). Dans le cours physique, ce point d'application est toujours évident :

- Le point d'application de l'action de la pesanteur est le centre d'inertie, ou centre de masse, G.
- Le point d'application d'une force s'exerçant en un point A du solide est ce point A.

  Par exemple si un ressort est attaché en un point A du solide, le point d'application de l'action du ressort sur le solide est A.

Cas plus compliqués : action de l'eau sur un barrage, action des frottements sur un plan, ...
Un exemple d'action mécanique qui ne possède pas de point d'application est un couple.

b/ Couple

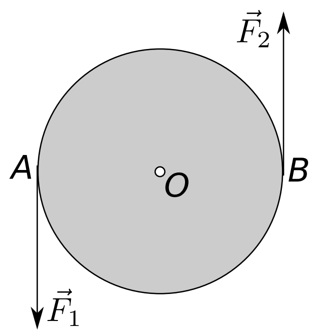
Couple

Définition : un couple est un cas particulier d'action mécanique pour laquelle la résultante est nulle.

Propriété : le moment d'un couple ne dépend pas du point où il est calculé. $\forall\ A$, $\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_O$.

On le note en général $\vec{C}$ sans préciser le point de référence, et C si c'est le moment par rapport à un axe.

C'est un cas d'action très important, car il permet de mettre en rotation un objet sans le déplacer dans son ensemble (d'après le théorème de la résultante dynamique, $m\vec{a}(G) = \vec{0}$).

> **Exemple :**
>
> On tourne un volant en exerçant avec chaque main une force égale (mais opposée) en A et en B.
>
> La somme des forces est nulle, mais ceci entraîne tout de même une rotation du volant.
>
> $\rightsquigarrow_5$ On peut calculer ce couple : c'est la somme des deux moments selon l'axe Oz, avec la méthode du bras de levier (en notant $F = \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$) :
>
> $$C = \Gamma_{Oz}(\vec{F}_1) + \Gamma_{Oz}(\vec{F}_2) = AO \times F + OB \times F = AB \times F.$$
>
> 
>
>
> On constate que le couple est d'autant plus important que la force est grande et que le bras de levier est grand.

On parle de "couple" à cause de l'exemple ci-dessus : car il est créé par un couple de deux forces.
Cependant ce n'est pas la seule possibilité : un moteur produit un couple sur son axe, certains dispositifs de freinage également (si leur résultante est nulle), etc.

c/ Cas particulier d'une liaison pivot

Liaison pivot

Définition : une liaison pivot d'axe Δ ne permet qu'un seul degré de liberté : une rotation autour de Δ.

Propriétés :

- La résultante $\vec{F}$ associée à cette liaison n'est en général pas nulle.

Concernant le moment scalaire selon l'axe Δ, Γ_Δ :

- S'il y a des frottements, il n'est pas nul. On peut parler de couple de frottements, qui résiste au mouvement.
- Si la liaison pivot est **parfaite**, alors $\boxed{\Gamma_\Delta = 0.}$

3 – Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation (axe fixe)

On se place dans un référentiel galiléen.

Soit Oz un axe *fixe* dans ce référentiel, autour duquel tourne le solide.

Soit $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$ le moment cinétique de ce solide par rapport à Oz, et $\Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)$ les moments des forces externes appliquées au solide.

$$\text{On a :} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i).}$$

S'il y a un couple C qui intervient, il est à considérer comme un moment : on a $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = C + ...$

$\Rightarrow$ La différence avec le cas d'un point est donc dans l'expression de σ_{Oz} : il faut utiliser l'expression $\boxed{\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}.}$

Ce théorème est admis. Il se démontre en découpant le solide en masses m_i centrées sur des points M_i, puis en appliquant le théorème du moment cinétique à chaque point et en les sommant tous, un peu comme pour le PFD.

En particulier, on constate que les moments des forces internes se simplifient et disparaissent. Ce théorème est donc valable aussi pour un système déformable. $\rightsquigarrow_6$ Faire l'**EC1**.

4 – Application : le pendule pesant

Jusqu'ici nous avons étudié le pendule *simple* : toute la masse était concentrée en un point M, situé à une distance l du point de pivot. On appelle pendule *pesant* un modèle plus précis, où on prend en compte le fait que la masse n'est pas ponctuelle. Avec nos nouveaux outils, nous pouvons traiter ce cas. $\rightsquigarrow_7$ Faire l'**EC2**.

IV – Solide en rotation : approche avec le théorème de l'énergie cinétique

Dans cette partie IV, on considère un solide, en rotation autour d'un axe fixe.

> $\rightsquigarrow_8$ **Rappel** : pour un point matériel (donc ponctuel) de masse m et vitesse $\vec{v}$, donner les expressions de l'énergie cinétique, de la puissance d'une force $\vec{F}_i$, et du théorème du moment cinétique.
> $E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad \mathcal{P}(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot \vec{v}, \quad \dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i).$
> Voyons comment ceci se généralise à un solide en rotation.

1 – Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Énergie cinétique

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω.

Son énergie cinétique s'écrit

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2,}$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ (unité S.I. : $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$).

> **Démonstration** (hors programme, non présente dans le poly élève) :
>
> L'idée est similaire à la démonstration de la relation $\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$. On découpe le solide en morceaux de masse m_i centrés en M_i, et on écrit l'énergie cinétique de l'ensemble :
>
> $$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v(M_i)^2 \underset{|v(M_i)| = |r_i \omega|}{\overset{}{=}} \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{= J_{Oz}} \omega^2.$$

On voit alors qu'on peut sortir le $\frac{1}{2}$ et le ω de la somme, et qu'on a bien le résultat.

Remarque : (pas dans le poly élève) Cette formule n'est valable que si le solide tourne autour d'un axe fixe. La formule générale (pas à connaître) pour un solide est $E_c = \dfrac{1}{2}mv(G)^2 + \dfrac{1}{2}J_{\Delta_G}\omega^2$ avec ω vitesse angulaire de rotation autour de l'axe de rotation qui passe par G, dans le référenciel barycentrique, et $\vec{v}(G)$ vitesse du centre de masse du solide.

2 – Puissance d'une action mécanique sur un solide

Tout comme pour le moment d'une action mécanique, la puissance associée est en général complexe à exprimer. Seuls les cas simples suivants sont à retenir :

Puissance d'une action mécanique reçue par le système

Soit une action mécanique de résultante $\vec{F}$ et de moment $\vec{\Gamma}_M$.

- Si l'action mécanique possède un point d'application A, alors sa puissance s'écrit

$$\boxed{\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}(A).}$$

  Exemple : la puissance du poids s'écrit $\mathcal{P} = m\vec{g}\cdot\vec{v}(G)$.

- La puissance associée à l'action mécanique d'une liaison pivot *parfaite* est nulle.

Remarque : cas d'une liaison pivot qui exerce un couple de frottements ou moteur C : $\mathcal{P} = C\omega$ avec ω la vitesse angulaire de rotation.

Formule générale (pour un solide) (pas dans le poly élève) : $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}(H) + \vec{\Gamma}_H\cdot\vec{\omega}$ avec H point quelconque du solide.

3 – Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation (axe fixe)

On se place dans un référentiel galiléen.

Soit Oz un axe *fixe* dans ce référentiel, autour duquel tourne le solide.

Soit $E_c = \dfrac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$ l'énergie cinétique de rotation de ce solide par rapport à Oz.

Soit $\vec{F}_i$ les résultantes appliquées au solide.

$$\text{On a} \quad : \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i).}$$

$\Rightarrow$ La différence avec le cas d'un point est donc dans l'expression de E_c : il faut utiliser l'expression $E_c = \dfrac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$.

Théorème admis. Il se démontre en découpant le solide en masses m_i centrées sur des points M_i, puis en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chaque point et en les sommant tous.

Enfin, pour un solide en rotation le TMC et le TEC sont équivalents. Dans un problème, il est inutile d'appliquer les deux. Il faut choisir celui que l'on préfère.

Démonstration (pas dans le poly élève) : équivalence du théorème de l'énergie cinétique et du théorème du moment cinétique

Notons M_i le point d'application de la force $\vec{F}_i$, et R_i la distance entre l'axe et M_i. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du point

M_i ne dépend pas du point (c'est la même pour tout le solide). On a :

$$\begin{aligned}\text{TEC} \;:\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2\right) &= \sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{v}(M_i)\\ \Leftrightarrow J_{Oz}\ddot{\theta}\dot{\theta} &= \sum_i \vec{F}_i\cdot R_i\dot{\theta}\vec{e}_\theta\\ \Leftrightarrow J_{Oz}\ddot{\theta} &= \sum_i \vec{F}_i\cdot R_i\vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

On reconnaît à gauche la dérivée du moment cinétique.

Quant au terme de droite, il faut écrire que $\Gamma_{Oz}(\vec{F}_i) = (R_i\vec{e}_r\wedge\vec{F}_i)\cdot\vec{e}_z = (\vec{e}_z\wedge R_i\vec{e}_r)\cdot\vec{F}_i = R_i\vec{e}_\theta\cdot\vec{F}_i$.

On retrouve donc exactement le théorème du moment cinétique.

$\rightsquigarrow_9$ Faire l'**EC3**.

Autres théorèmes énergétiques

On a aussi, comme en mécanique du point :

- La version intégrale du théorème de l'énergie cinétique : entre un point A et un point B,

$$\Delta E_c = \underbrace{\sum_i W_{A\to B}(\vec{F}_i)}_{\text{toutes les forces}} \quad \text{avec} \quad \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A).$$

- Le théorème de l'énergie mécanique, entre un point A et un point B :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \underbrace{\sum_i W_{A\to B}(\vec{F}_i)}_{\text{forces non conservatives}}\quad.$$

On a encore pour la pesanteur $E_p = mgz_G$ avec z_G altitude du centre de masse (axe z vers le haut), $E_p = \dfrac{1}{2}k(l-l_0)^2$ pour un ressort, etc.

V – Approche énergétique dans le cas d'un système déformable

1 – Différences avec le cas du solide

On considère ici un système **déformable** (par opposition à un solide qui lui est indéformable).

Théorème	Cas du solide	Cas du système déformable
PFD	$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{actions extérieures}}$	Idem.
TMC, rotation axe fixe	$\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)}_{\text{actions extérieures}}$	Idem. (mais attention, le moment d'inertie J dépend du temps si le système se déforme)
TEC, rotation axe fixe	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)}_{\text{actions extérieures}}$	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)}_{\text{actions extérieures \underline{et intérieures}}}$

En effet, il peut y avoir des actions internes au système (action d'une partie du système sur une autre partie).

– Dans le PFD et le TMC, les résultantes et les moments des actions intérieures sont de somme totale nulle : il n'interviennent donc pas dans la somme.

– C'est différent dans le TEC.

  Pour un solide, la puissance des forces intérieures est nulle car la vitesse relative des points est nulle : pas de déplacement relatif $\Rightarrow$ pas de travail).

  Ce n'est plus le cas s'il y a déformation ou mouvement des pièces les unes par rapport aux autres : alors la puissance des forces intérieures ne disparaît pas.

2 – Exemple du "tabouret d'inertie"

Cf TD.