Mécanique
Chapitre 6

Correction – TD – Mouvement dans un champ de force centrale

I Questions courtes ★ | [● ○ ○]

1 - Dans le référentiel terrestre, la Terre est immobile. Donc elle ne tourne pas.

Dans le référentiel géocentrique elle a un mouvement uniquement de rotation sur elle-même, avec un tour en 24h (23h 56min pour être précis).

Dans le référentiel héliocentrique elle a un mouvement de translation circulaire autour du Soleil (en un an), et de rotation sur elle-même avec un tour en 24h (23h 56min pour être précis).

2 - L'équateur est l'endroit sur Terre situé à la plus grande distance de l'axe de rotation de la Terre. C'est donc là que la vitesse (mesurée dans le référentiel géocentrique) est la plus grande.

Cette vitesse vaut $v = \dfrac{2\pi R_T}{24\,\mathrm{h}} = 1675\,\mathrm{km/h} = 465\,\mathrm{m/s}$.

Ceci reste inférieur à la vitesse en orbite basse, qui est d'environ $8\,\mathrm{km/s}$ (heureusement, sinon nous serions satellisés au moindre saut !).

II Vitesse de libération [● ○ ○]

1 - $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GmM_T}{r}$.

Lorsque $r \to +\infty$ on a $E_m = \dfrac{1}{2}mv_\infty^2 = E_{c,\infty}$ avec v_∞ la vitesse limite.

Au départ, $E_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - \dfrac{GmM_T}{R_T}$.

Donc par conservation, $E_{c,\infty} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - \dfrac{GmM_T}{R_T}$.

2 - La vitesse minimale v_0 à communiquer est lorsqu'on a tout juste $E_{c,\infty} = 0$.

On en déduit

$$\boxed{v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11{,}2\,\mathrm{km/s}.}$$

III Trou noir supermassif [● ○ ○]

On utilise la troisième loi de Kepler pour l'étoile S1 : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{\mathrm{TN}}}$.

On isole la masse du trou noir : $M_{\mathrm{TN}} = \dfrac{4\pi^2}{G}\,\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67\times 10^{-11}}\,\dfrac{(3300\times 1{,}5\times 10^{11})^3}{(94\times 365{,}25\times 86400)^2} = 8{,}1\times 10^{36}\,\mathrm{kg}$.

Si on divise par la masse du Soleil, M_S, on obtient $M_{\mathrm{TN}} = 4{,}1\times 10^6\,M_S$, soit donc 4 millions de masses solaires.

IV Astéroïde géocroiseur [• • ○]

1 - La seule force s'exerçant sur l'astéroïde est la force d'attraction gravitationnelle, qui est conservative. L'énergie mécanique se conserve donc.

L'énergie potentielle dont cette force dérive est $E_p(r) = -\dfrac{GM_T m}{r}$.

Traduction pour la conservation entre l'arrivée en moins l'infini et le point P :

$$E_m(-\infty) = E_m(P) \ \text{ donc } \boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GM_T m}{r_P}.}$$

2 - Il suffit d'appliquer le théorème du moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OM} // \vec{F}$.

Donc le moment cinétique en O est constant.

On place un point H au niveau de la situation initiale, qui est le projeté de M sur la droite passant par O et parallèle à $\vec{v}_0$ (déjà fait sur le schéma, à faire dans un énoncé où ce ne serait pas fait).

Calculons $\vec{\sigma}_O$ lorsque la masse est en M_0 :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_O &= \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v}_0 \\
&= (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}) \wedge m\vec{v}_0 \\
&= m \underbrace{\overrightarrow{OH} \wedge \vec{v}_0}_{=\vec{0}} + m\overrightarrow{HM_0} \wedge \vec{v}_0 \\
&= -mbv_0\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

(On prend un axe z qui sort de la feuille. Pour trouver le signe moins on utilise la règle de la main droite. De plus $\overrightarrow{OH} // \vec{v}_0$, d'où la nullité de ce produit vectoriel.)

Puis calculons $\vec{\sigma}_O$ lorsque la masse est en P :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_O &= \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}_P \\
&= -mr_P v_P\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

(Ici $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}_P$, donc le produit vectoriel se calcule simplement.)

Le moment est le même en M_0 et en P, on doit donc avoir

$$\boxed{bv_0 = r_P v_P.}$$

3 - La question précédente permet d'obtenir $v_P = bv_0/r_P$. On injecte ceci dans l'expression de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{bv_0}{r_P}\right)^2 - \frac{GM_T}{r_P}$$

On multiplie tout par r_P^2 :

$$\frac{1}{2}v_0^2\,r_P^2 = \frac{1}{2}b^2v_0^2 - GM_T\,r_P.$$

Et on se ramène à un trinôme :

$$\frac{1}{2}v_0^2\,r_P^2 + GM_T\,r_P - \frac{1}{2}b^2v_0^2 = 0.$$

Discriminant : $\Delta = G^2M_T^2 + 4 \times \frac{1}{2}v_0^2 \times \frac{1}{2}b^2v_0^2 = G^2M_T^2 + b^2v_0^4$.

D'où les deux solutions :

$$r_P = \frac{-GM_T \pm \sqrt{G^2M_T^2 + b^2v_0^4}}{v_0^2}.$$

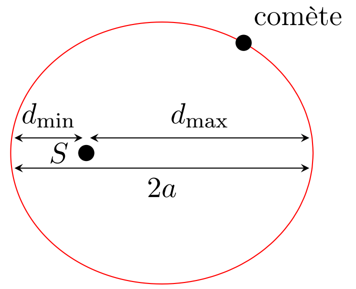
La solution avec un moins est négative, mais pas celle avec un plus. On a donc finalement :

$$\boxed{r_P = \frac{-GM_T \pm \sqrt{G^2M_T^2 + b^2v_0^4}}{v_0^2}.}$$

4 - $r_P = 41 \times 10^3\,\mathrm{km} > R_T + R_{\rm atm}$ donc pas d'étoile filante !

V Comète de Halley ★ | [• ○ ○]

1 - Voir figure ci-contre. Le Soleil S est un des foyers de l'ellipse. On représente en outre les distances minimale $d_{\min}$ et maximale $d_{\max}$ de la comète au Soleil, ainsi que le grand axe $2a$ de l'ellipse.



$e = 0{,}5$

$e = 0{,}97$ (cas de la comète)

Ci-dessus on a représenter deux cas différents, avec deux excentricités différentes. Sur votre copie il suffit d'en faire un seul, avec une forme approximative pour l'ellipse (il faut un ordinateur pour tracer une forme exacte pour un e donné).

2 - Les années dans l'énoncé permettent de voir que $T = 76\,\text{ans}$ (ou 75).

La troisième loi de Kepler permet de déterminer le demi-grand axe a, puisque

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_{\rm S} G} \quad \text{d'où} \quad a = \left(\frac{T^2 M_{\rm S} G}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 17{,}9\,\text{u.a.}$$

Or d'après la figure

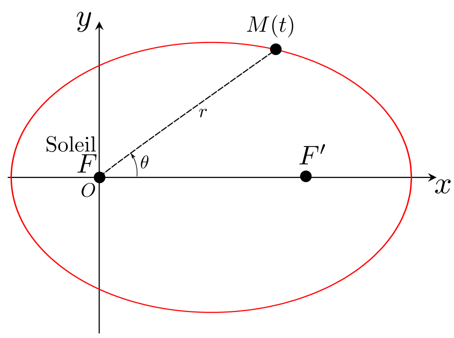
$$d_{\max} + d_{\min} = 2a$$

d'où on déduit

$$\boxed{d_{\max} = 2\left(\frac{T^2 M_{\rm S} G}{4\pi^2}\right)^{1/3} - d_{\min} = 5{,}3 \times 10^{12}\,\mathrm{m} = 35{,}2\,\text{u.a.}.}$$

(En comparaison, Pluton s'éloigne d'environ 50 u.a. du Soleil.)

3 -



D'après le schéma,

$$d_{\max} = r(0) = \frac{p}{1-e} \quad \text{et} \quad d_{\min} = r(\pi) = \frac{p}{1+e}$$

D'où on déduit

$$\frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{1-e}{1+e} \quad \text{soit} \quad e = \frac{1 - \dfrac{d_{\min}}{d_{\max}}}{1 + \dfrac{d_{\min}}{d_{\max}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\max} + d_{\min}} = 0{,}97}$$

et de même

$$\boxed{p = d_{\min}(1+e) = 1{,}1\ \text{u.a.}}$$

VI E_m pour une trajectoire elliptique [● ● ○]

1 - $E_m = \dfrac{1}{2}m'v^2 + E_p(r) = \dfrac{1}{2}m'(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \dfrac{Gmm'}{r}$.

2 - On remplace $r\dot{\theta}$ par C/r, donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m'\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m'\left(\frac{C}{r}\right)^2 - \frac{Gmm'}{r}}_{E_{p,\text{eff}}(r)}.$$

3 - $E_m = E_{p,\text{eff}}(r) \quad \Leftrightarrow \quad E_m - \dfrac{1}{2}m'\left(\dfrac{C}{r}\right)^2 + \dfrac{Gmm'}{r} = 0$, soit en multipliant par r^2 :

$$\Leftrightarrow \quad E_m r^2 - \frac{1}{2}m'C^2 + Gmm'r = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + \frac{Gmm'}{E_m}r - \frac{m'C^2}{2E_m} = 0.$$

4 - r_p et r_a sont les racines de l'équation précédente. Elle s'écrit donc aussi $(r - r_p)(r - r_a) = 0$, soit en développant : $r^2 - (r_p + r_a)r + r_p r_a = 0$.

Par identification, on a donc $-(r_p + r_a) = \dfrac{Gmm'}{E_m}$.

Or $r_p + r_a = 2a$ (cf un schéma d'ellipse).

Donc on a $-2a = \dfrac{Gmm'}{E_m}$, soit donc $\boxed{E_m = -\dfrac{Gmm'}{2a}.}$

VII Freinage d'un satellite dans l'atmosphère [● ○ ○]

1 - Cette question est traitée dans l'EC2. La vitesse se déduit de la loi de la quantité de mouvement.

- Système : le satellite, assimilable à un point matériel de masse m ;
- Référentiel géocentrique $\mathcal{R}$, considéré comme galiléen ;
- Bilan des forces : le satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle,

$$\vec{F} = -G\frac{M_T\, m}{r^2}\vec{e}_r\,,$$

exprimée ici dans un repérage cylindrique (on sait que le mouvement du satellite est plan).

Comme l'orbite du satellite est circulaire, alors les grandeurs cinématiques s'écrivent

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \qquad \overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \overrightarrow{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta\,.$$

D'après la loi de la quantité de mouvement, $m\vec{a} = \vec{F}$, ce qui donne en projection sur $\vec{e}_r$

$$-mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{M_T\, m}{r^2}$$

Cette relation implique $\dot{\theta}$, la vitesse angulaire, alors que l'on souhaite une relation portant directement sur la vitesse v. Pour passer de l'une à l'autre il suffit d'identifier $v = \pm R\dot{\theta}$: le signe dépend du sens de parcours, mais va disparaître avec le carré. Ainsi,

$$r\frac{v^2}{r^2} = \frac{G\,M_T}{r^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}}$$

On en déduit alors l'énergie mécanique,

$$E_\text{m} = E_\text{c} + E_\text{p} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{G\,M_T\,m}{r} = \frac{G\,m\,M_T}{2r} - \frac{G\,M_T\,m}{r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_\text{m} = -\frac{G\,m\,M_T}{2r}\,.}$$

L'énergie mécanique est négative, ce qui est normal car le satellite est dans un état lié.

2 - Le travail W des forces de frottement entre le satellite et l'atmosphère est forcément résistant, $W < 0$. La puissance associée également. Il contribue donc à faire diminuer l'énergie mécanique. En effet, d'après le théorème de l'énergie mécanique,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} < 0\,.}$$

3 - Compte tenu de l'expression de E_m établie précédemment, si l'énergie mécanique diminue alors le rayon r diminue (il y a un signe moins).

En supposant cette diminution régulière, la trajectoire a alors l'allure d'une spirale.

4 - Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que l'orbite du satellite demeure quasi-circulaire. On peut donc généraliser le résultat obtenu précédemment reliant vitesse et rayon : $v = \sqrt{GM_T/r}$. Ainsi si le rayon de l'orbite du satellite diminue, alors nécessairement sa vitesse augmente.

On se trouve face à un résultat paradoxal : les frottements ont pour effet d'augmenter la vitesse du satellite ! (Mais l'énergie potentielle décroît, si bien que globalement l'énergie mécanique totale décroît.)

5 - a - Théorème de l'énergie mécanique sur un tour : $\Delta E_m = W(\vec{f})$.
Le travail des forces de frottement sur un tour s'écrit

$$\begin{aligned} W(\vec{f}) &= \int_{\text{un tour}} \vec{f}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\text{un tour}} -\alpha m v^2 \vec{e}_\theta \cdot dl\vec{e}_\theta \\ &= -\alpha m v^2 \int_{\text{un tour}} \mathrm{d}l \\ &= -\alpha m v^2\, 2\pi r. \end{aligned}$$

On utilise l'expression de v trouvée plus tôt, et on a donc

$$\boxed{\Delta E_m = -2\pi\alpha m G M_T.}$$

b - Question 1 : on avait $E_m = -\dfrac{G\,m\,M_T}{2r}$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta E_m &= E_m(r-\Delta r) - E_m(r) \\ &= -\frac{G\,m\,M_T}{2(r-\Delta r)} + \frac{G\,m\,M_T}{2r} \\ &= -\frac{G\,m\,M_T}{2r}\,\frac{1}{1-\Delta r/r} + \frac{G\,m\,M_T}{2r} \\ &\underbrace{=}_{\Delta r/r \ll 1} -\frac{G\,m\,M_T}{2r}\,(1+\Delta r/r) + \frac{G\,m\,M_T}{2r} \\ &= -\frac{G\,m\,M_T}{2r^2}\Delta r. \end{aligned}$$

On a donc $\Delta r = -\dfrac{2r^2}{GmM_T}\Delta E_m$, d'où, en utilisant l'expression de ΔE_m de la question 5.a :

$$\boxed{\Delta r = 4\pi\alpha r^2 = 82\,\mathrm{cm}.}$$

Remarque : On a bien $\Delta r \ll r$, ce qui justifie le développement limité, et le fait d'avoir considéré l'orbite quasi-circulaire.

c - Pour perdre une altitude $\Delta h = 10\,\mathrm{km}$, il faut un nombre de tours $N = \dfrac{\Delta h}{\Delta r} = 12\,179$.

Or un tour prend $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi r}{\sqrt{\dfrac{GM_T}{r}}} = 5325\,\mathrm{s}$,

et donc $\boxed{NT = 751\,\text{jours.}}$

Ceci fait environ deux ans, on voit donc que la perte d'altitude n'est pas négligeable et qu'il faut s'en préoccuper. Bien sûr ce n'est pas un problème pour les satellites qui sont plus haut, car les frottements sont plus faibles (ils sont plus loin de l'atmosphère).

Remarque peu utile :

Il peut sembler paradoxal que la force de frottement $\vec{f}$ qui s'oppose au mouvement résulte en une augmentation de la vitesse du satellite. Ceci semble en contradiction avec le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r \cdot \vec{v}}_{\simeq 0} + \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha m v^3 < 0,$$

donc E_c diminue, donc v diminue ! !

Où est le problème ?

En réalité l'orbite du satellite n'est pas exactement circulaire (puisqu'il perd de l'altitude), donc ci-dessus $\vec{e}_r \cdot \vec{v} \neq 0$. Un schéma montre même que $\vec{e}_r \cdot \vec{v} > 0$. Il n'est donc pas évident de conclure sur le signe de $\mathrm{d}E_c/\mathrm{d}t$.

On peut affiner l'analyse pour comprendre pourquoi il y a un soucis avec le TEC, et pas avec le TEM. Posons

$$\varepsilon = \frac{\|\vec{f}\|}{GmM_T/r^2}.$$

On a $\varepsilon \ll 1$ par hypothèse (pour que l'orbite soit quasi-circulaire les frottements ne doivent pas être trop importants). Notons $\mathcal{O}(\varepsilon)$ une correction qui est de l'ordre de ε ou moins. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{GmM_T}{2r} + \mathcal{O}(\varepsilon),\\
E_p &= -\frac{GM_Tm}{r} \quad \text{(exact)},\\
E_m &= E_c + E_p = -\frac{GmM_T}{2r} + \mathcal{O}(\varepsilon),\\
\vec{e}_r \cdot \vec{v} &= \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

L'application du TEM ne pose donc pas de problème car dans E_m on peut négliger le $\mathcal{O}(\varepsilon)$ devant le terme $GmM_T/(2r)$.
En revanche pour le TEC on a :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{GmM_T}{r^2}\left(\vec{e}_r \cdot \vec{v} + \frac{\vec{f}}{-GmM_T/r^2} \cdot \vec{v}\right),$$

et les deux termes de droite sont du même ordre ($\mathcal{O}(\varepsilon)$), l'un positif, l'autre négatif : on ne peut pas en négliger un et on ne peut rien conclure.

L'analyse avec le TEM montre de façon correcte que v augmente. Ceci signifie que si la force $\vec{f}$ a bien une puissance négative et tend à faire diminuer v, la force d'attraction terrestre a quant à elle une puissance positive plus importante (positive car $\vec{v}$ n'est pas selon $\vec{e}_\theta$ mais incliné vers la Terre), et le résultat net est une augmentation de v.

VIII Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène [• ○ ○]

1 - Force électrostatique : $\vec{F} = \dfrac{e \times (-e)}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r$ est le vecteur des coordonnées polaires dans le plan du mouvement.

L'énergie potentielle est telle que $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$.

On primitive, en prenant une constante nulle : $\boxed{E_p = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r}.}$

2 - L'électron en mouvement par rapport à un référentiel lié au proton. Son poids est négligeable devant la force électrique exercée par le proton, ce qui a été justifié dans le chapitre sur les particules chargées.

Repère polaire dans le plan du mouvement. r constant donc :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \qquad \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta\,.$$

D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron en mouvement circulaire,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur $\vec{e}_r$:

$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,.$$

Or $\dot{\theta}^2 = v^2/r^2$, d'où

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,r}}\,.}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r} - \frac{e^2}{4\pi\,\epsilon_0\,r} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_m = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3 - Moment cinétique $L_P(n) = |(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v})\cdot\vec{e}_z| = |(r_n\vec{e}_r \wedge mr_n\dot{\theta}\vec{e}_\theta)\cdot\vec{e}_z| = mr_n^2|\dot{\theta}|$.

Or $|\dot{\theta}| = \dfrac{v}{r_n} = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r_n^3}}$, d'où $\boxed{L_P(n) = \sqrt{\dfrac{mr_ne^2}{4\pi\varepsilon_0}}.}$

4 - On utilise la condition de quantification de Bohr : $L_P(n) = n\hbar$, d'où

$$\sqrt{\frac{mr_ne^2}{4\pi\varepsilon_0}} = n\hbar, \ \text{ soit } \ \boxed{r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2\,n^2}{me^2}.}$$

5 - On en déduit l'énergie mécanique pour l'orbite numéro n : $E_n = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\dfrac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2\,n^2}$, et on a bien

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = 2{,}18\times10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}6\,\mathrm{eV}.$$

On retrouve bien la formule qui donne les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, tels qu'on les observe via les longueurs d'onde du spectre d'émission ou d'absorption.