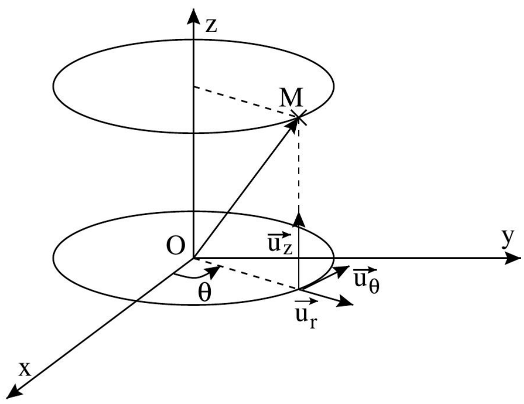
Mécanique
Chapitre 2

Correction – TD – Mouvements en coordonnées non cartésiennes

I Entraînement aux coordonnées polaires

Seul le schéma de gauche est correct, car $\vec{e}_\theta$ va toujours dans le sens des θ croissants.

II Entraînement aux coordonnées cylindriques



2 - Les projections donnent

$$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{1}$$

3 - On peut évidemment inverser les équations précédentes, mais il est plus intéressant de raisonner aussi par projections.

$$\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_z = \vec{e}_z \tag{2}$$

III Cinématique : rayon de courbure d'une autoroute

2 - Il faut $R \geq \dfrac{v^2}{\mu g}$. On trouve 794 m à 110 km/h et 1108 m à 130 km/h.

IV Cinématique en coordonnées cylindriques : parking

1 - Coordonnées cylindriques.

2 - $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z$, avec $\boxed{r(t) = R}$ constant, et pour $z(t)$: la voiture a une vitesse selon l'axe z qui est $v_z = V_0 \sin\alpha$, donc $\boxed{z(t) = t \times V_0 \sin\alpha}$ (on suppose $z(0) = 0$).

3 - $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \times V_0 \sin\alpha\vec{e}_z = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \times V_0 \sin\alpha\vec{e}_z$.

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

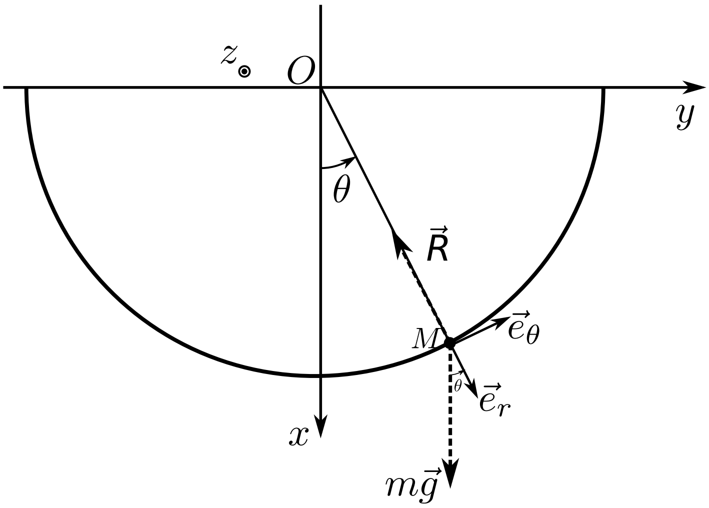
On sait que $\|\vec{v}\| = V_0$ est constante. Or $\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + (V_0 \sin\alpha)^2}$, c'est donc que $|\dot{\theta}|$ est constant.

On a donc $\ddot{\theta} = 0$, ce qui signifie que l'accélération tangentielle $R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ est nulle.

V Glissade sur un igloo

On doit trouver, à la toute fin, un angle de décolage $\theta = \arccos(2/3) = 48^o$.

VI Snowbord dans un half-pipe



1 - ⋆ Référentiel terrestre galiléen. Coordonnées polaires.

⋆ Bilan des forces sur le système {snowboarder} (faire un schéma pour les projections) :

- Poids $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$.
- Réaction $\vec{N} = N\vec{e}_r$ avec $N < 0$ (et pas de composante selon $\vec{e}_\theta$ car pas de frottements)

⋆ Accélération : on part de la position et on dérive :

– $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$

– $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

– $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

⋆ PFD au système {snowboarder} :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N},$$

d'où :

$$mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta + R\vec{e}_r$$

Projection sur $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$, d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.}$$

2 - On a donc

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0,$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = \text{cst}$$

On obtient la constante en évaluant l'expression à $t = 0$: on a $\dot{\theta} = 0$ car pas de vitesse initiale et $\cos\theta = \cos\pi/2 = 0$, donc la constante est nulle.

On a donc finalement :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\cos\theta.}$$

3 - On utilise cette fois la projection sur $\vec{e}_r$ du PFD : $-mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N$.

On isole N et on remplace $\dot{\theta}^2$ par l'expression obtenue à la question précédente :

$$N = -mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}\cos\theta, \text{ soit } \boxed{N = -3mg\cos\theta.}$$

Ainsi $\vec{N} = -3mg\cos\theta\vec{e}_r$, dont la norme est maximale en $\theta = 0$ (donc au centre du half-pipe) et vaut alors $\boxed{N_{\max} = 3mg.}$ À ce moment là, le snowboarder a la sensation de peser trois fois son propre poids.

VII Cinématique : gravité artificielle

Un point M situé à une distance R du centre O de la station spatiale est en mouvement circulaire uniforme. On utilise des coordonnées polaires centrées en O.
On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R\vec{e}_r, \\ \vec{v} &= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\dot{\theta} = v/R$ est constant car le mouvement est circulaire uniforme.

On souhaite avoir $\|\vec{a}\| = g$, donc $R\dot{\theta}^2 = g$, donc $\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}} \simeq 1\,\text{rad/s.}}$

On convertit :

$$\frac{1\,\text{rad}}{1\,\text{s}} = \frac{1\,\text{tour}/2\pi}{1\,\text{min}/60} = \frac{60}{2\pi}\,\text{tr/min},$$

soit donc $\boxed{\dot{\theta} = 1\,\text{rad/s} = 9{,}6\,\text{tr/min.}}$

VIII Enroulement d'un fil

1 - ⋆ On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$.

Or $\overrightarrow{OI} = R\vec{e}_r$.

Comme le fil est toujours tangent à la bobine, on a $\overrightarrow{IM}$ selon $\vec{e}_\theta$. Et la norme de ce vecteur est la longueur totale moins ce qui a été enroulé donc $L - R\theta$.

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + (L - R\theta)\vec{e}_\theta.}$$

⋆ On dérive une fois pour avoir la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} &= R\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(L - R\theta)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + (L - R\theta)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \\ &= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}\vec{e}_\theta - (L - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r. \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v} = -(L - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r.}$$

⋆ Et on redérive pour obtenir l'accélération :

$$\vec{a} = -\frac{\mathrm{d}(L - R\theta)}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L - R\theta)\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r - (L - R\theta)\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{a} = R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L - R\theta)\ddot{\theta}\vec{e}_r - (L - R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta.}$$

2 - Bilan des forces sur le système {point matériel M} : la tension du fil $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ (on rappelle que le fil est tangent, donc selon $\vec{e}_\theta$.

PFD (même système, référentiel terrestre supposé galiléen) :

$$\begin{aligned} & m\vec{a} = \vec{T}, \\ \Rightarrow\ & mR\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - m(L-R\theta)\ddot{\theta}\vec{e}_r - m(L-R\theta)\dot{\theta}^2\vec{e}_\theta = T\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

On projette sur $\vec{e}_r$ (car sur $\vec{e}_\theta$ il y a T qui est inconnu), et on obtient :

$$R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\ddot{\theta} = 0.$$

Or $R\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{e}_r - (L-R\theta)\ddot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((L-R\theta)\dot{\theta}\Big)$, c'est donc que

$$(L-R\theta)\dot{\theta} = \text{cst}.$$

Cette quantité est en fait la composante de la vitesse, c'est donc que la vitesse est constante (en norme). Ainsi la constante est égale à la norme de la vitesse à $t=0$, c'est-à-dire v_0. On a donc $\boxed{(L-R\theta)\dot{\theta} = v_0.}$

3 - Il faut trouver une primitive de $(L-R\theta)\dot{\theta} = L\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta}$.

On vérifie que $L\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\theta - \dfrac{1}{2}R\theta^2\right)$.

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right) = v_0,$$

d'où

$$\left(L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2\right) = v_0 t + A,$$

avec A une constante d'intégration que l'on détermine en prenant $t=0$ dans la relation précédente : $0 = 0 + A$ (rappelons que $\theta(0) = 0$), donc $A = 0$. On a donc

$$\boxed{L\theta - \frac{1}{2}R\theta^2 = v_0 t.}$$

4 - Le fil est totalement enroulé lorsque $L = R\theta$, donc pour $\theta = L/R$.

On remplace dans l'expression précédente : $L\dfrac{L}{R} - \dfrac{1}{2}R\dfrac{L^2}{R^2} = v_0\tau$, d'où $\boxed{\tau = \dfrac{L^2}{2Rv_0}.}$