Étude des systèmes linéaires
Chapitre 5

TD – Filtres

Remarque : exercice avec $\star$: exercice particulièrement important, à maîtriser en priorité (de même que les exemples de questions de cours des "ce qu'il faut savoir faire")| [● ○ ○] : difficulté des exercices

I De l'équation différentielle à la fonction de transfert, et vice versa $\star$ | [● ○ ○]

On considère un système linéaire invariant, dont l'entrée est notée $e(t)$ et la sortie $s(t)$. On note $\underline{H}$ sa fonction de transfert.

1 - L'équation différentielle reliant $e(t)$ et $s(t)$ est donnée : $\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}e(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. En déduire l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}$.

Puis dans l'autre sens : dans chacun des cas ci-dessous, déduire de l'expression de $\underline{H}$ l'équation différentielle qui relie $e(t)$ et $s(t)$.

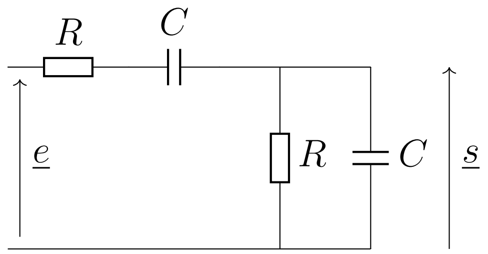
2 - $\underline{H} = 1 + \mathrm{j}\omega/\omega_0 + (\mathrm{j}\omega/\omega_0)^2$

3 - $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$

4 - $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

II Filtre à pont de Wien [● ○ ○]

On considère le filtre à pont de Wien ci-contre.



1 - Par une étude asymptotique, donner la nature du filtre.

À quel condition sur la pulsation d'entrée les condensateurs vont-ils effectivement se comporter comme des interrupteurs ouverts ? Et comme des interrupteurs fermés ?

2 - Montrer que la fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$, avec ω_0, H_0 et Q dont on donnera les expressions.

3 - Donner les équations des asymptotes dans le diagramme de Bode en gain et en phase.

4 - Tracer l'allure du diagramme de Bode (avec en abscisse la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$).

Identifier les pulsations de coupure et la bande passante sur votre graphique.

5 - Dans quelle gamme de fréquence ce filtre peut-il être utilisé comme dérivateur ? Comme intégrateur ?

III Exemples de filtres ★ | [● ○ ○]

Pour chacun des circuits ci-dessous :

a- Réaliser une étude asymptotique pour en déduire le type de filtre.

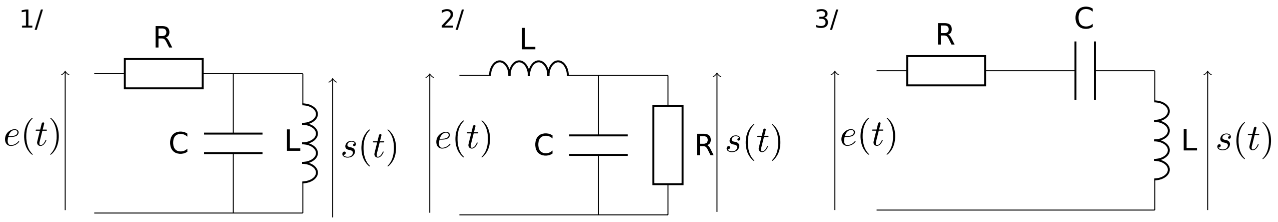
b- Donner l'expression de la fonction de transfert.

c- Mettre la fonction de transfert sous forme canonique, en choisissant parmi une des formes suivantes :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \qquad \underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \qquad \underline{H} = \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{1 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

On donnera les valeurs de Q et ω_0 en fonction de R, L et C.

d- Tracer l'allure asymptotique du diagramme de Bode (avec en abscisse la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$). (le circuit 1 est du même type que dans l'exercice précédent : on ne fera donc que les point a, b et c.)



Les plus rapides pourront donner les expressions du gain en décibel et de l'argument de $\underline{H}$.

IV Gabarit d'un filtre [● ● ○]

On veut réaliser un filtre pour éliminer le bruit dû au secteur, de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$, d'un signal dont les fréquences utiles sont supérieures à $100\,\mathrm{Hz}$. On se donne alors le cahier des charges suivant :

– l'amplitude des signaux sinusoïdaux de fréquence inférieure ou égale à $f_a = 50\,\text{Hz}$ est divisée par au moins $\sqrt{10}$.

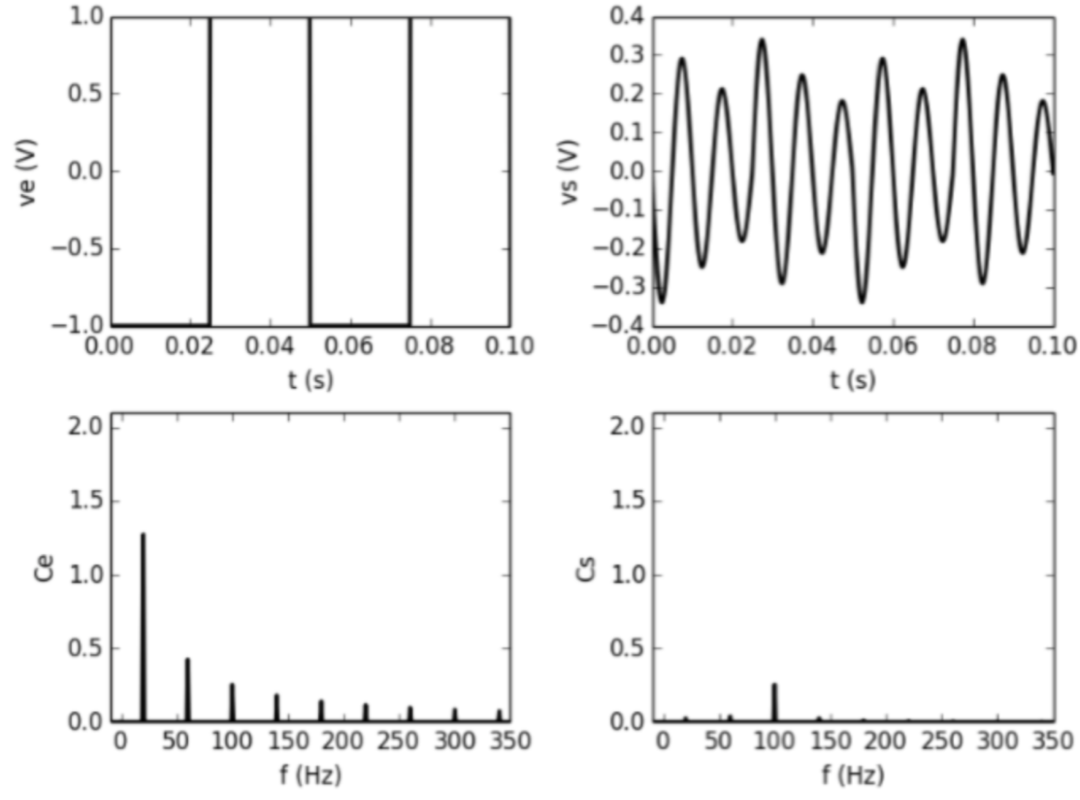
– l'amplitude des signaux sinusoïdaux de fréquence supérieure à $f_p = 100\,\text{Hz}$ est divisée par au plus $\sqrt{2}$.

1 - Traduire graphiquement ces exigences dans le plan de Bode $(G_{\text{dB}},\ \log(f))$. Quel type de filtre peut convenir ?

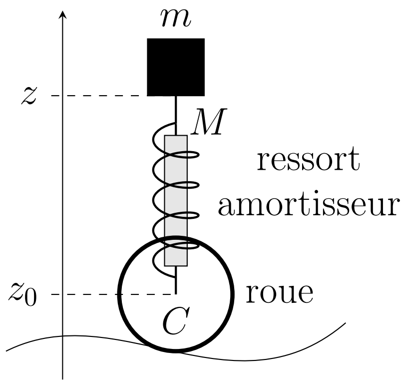
2 - Montrer qu'un filtre d'ordre un ne peut convenir.

V Filtrage d'un signal créneau [● ○ ○]

On dispose d'un filtre inconnu. On applique en entrée un signal créneau, dont on donne le spectre. En sortie du filtre, on obtient un signal, dont on donne également le spectre. Quelle est la nature du filtre et quelles sont ses caractéristiques ?



VI Suspension de VTT [$\bullet\bullet\circ$]



On considère la suspension avant d'un VTT, que l'on modélise comme l'association d'un ressort de raideur k, longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de constante de frottement α. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension. La roue suit exactement les oscillations du sol.

On peut montrer (de façon tout à fait analogue à l'exercice sur le skieur du chapitre précédent) que la côte $Z(t)$ du vététiste suit l'équation différentielle suivante (Z est la différence entre la côte z et la position d'équilibre) :

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t) \quad \text{avec} \quad F(t) = kz_0(t) + \alpha\dot{z}_0,$$

où $z_0(t)$ est le profil du chemin (bosses et creux, cailloux...).

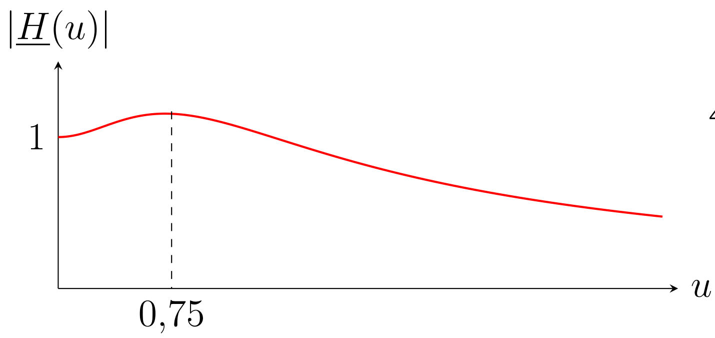
1 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}\,.$$

Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.

2 - On considère un cas où l'excitation $F(t)$ est de type sinusoïdale. Pourquoi ne perd-on pas en généralité en faisant cette hypothèse ?

3 - Pour un VTT se déplaçant à la vitesse V sur un chemin fait de cailloux de taille typique d, vers quelle pulsation le spectre d'excitation est-il maximal ?



4 - La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$. Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.