Partie V : Étude des systèmes linéaires
Chapitre 5

Correction – DM 12 – Étude et modélisation d'un sismomètre

1 - On part de l'équation du mouvement, et on passe en complexe en remplaçant s par $\underline{s}$, $\dot{s}$ par $\mathrm{j}\omega\underline{s}$, $\ddot{s}$ par $(\mathrm{j}\omega)^2\underline{s}$, et enfin $\ddot{x}_{\text{sol}}$ par $(\mathrm{j}\omega)^2\underline{x}_{\text{sol}}$. On obtient :

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{s} + \frac{\omega_0}{Q}(\mathrm{j}\omega)\underline{s} + \omega_0^2\underline{s} = A(\mathrm{j}\omega)^2\underline{x}_{\text{sol}},$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{x}_{\text{sol}}} = \frac{-A\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}.$$

Soit encore :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-A\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}.}$$

2 - On constate que $\underline{H}$ tend vers 0 pour $\omega \to 0$, et que $\underline{H}$ tend vers A pour $\omega \to +\infty$.

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut, du second ordre car présence de terme en ω^2 au dénominateur.

3 - ⋆ **Diagramme de Bode, asymptotes :**

– **À basses fréquences,** on a

$$\underline{H} \simeq \frac{-A\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1} \simeq -A\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log\left|\frac{A\omega^2}{\omega_0^2}\right| \simeq 20\,\log A + 40\,\log\frac{\omega}{\omega_0},}$ soit donc une pente de 40 dB/décade et une ordonnée à l'origine de 20 log A.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq \pm\pi$. Or pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H} = \dfrac{-A}{\mathrm{j}/Q}$ dont l'argument est $\pi/2$. On choisi donc un argument de π pour la limite haute fréquence, afin d'avoir un graphique continu.

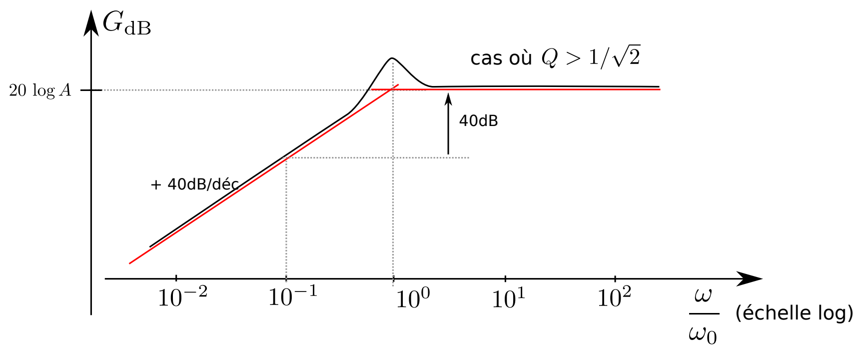
– **À hautes fréquences,** on a

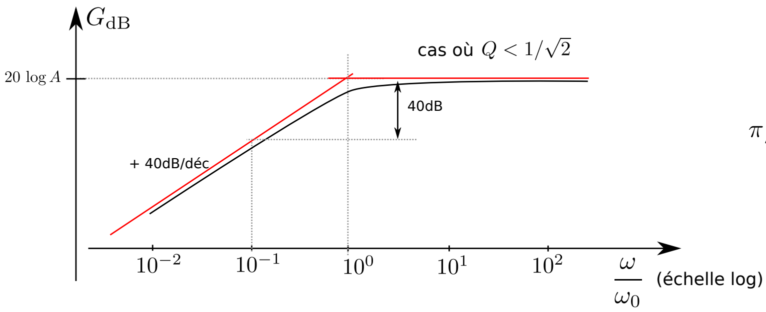
$$\underline{H} \simeq \frac{-A\omega^2/\omega_0^2}{-\omega^2/\omega_0^2} \simeq A.$$

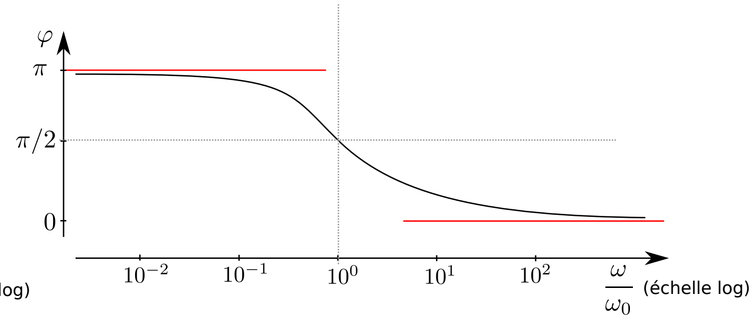
On a donc $\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log A,}$ soit donc une pente nulle.

Pour la phase : $\arg\underline{H} \simeq 0$.

⋆ **Tracé de l'allure :**







4 - Le sismomètre ne doit pas amplifier artificiellement les vibrations à une certaine fréquence. Il faut donc éviter l'existence de la résonance, et donc prendre $\boxed{Q < 1/\sqrt{2}.}$

5 - Les graphiques sont pour $Q = 1/\sqrt{2}$, cas où il n'y a pas encore résonance.

Pour $\omega = \omega_0$ on a $\underline{H}(\omega_0) = \dfrac{-A}{\mathrm{j}/Q} = \mathrm{j}AQ = \mathrm{j}\dfrac{A}{\sqrt{2}}$.

On s'attend donc à un gain qui dépend de A, mais pas à une atténuation très forte.

Quant à la phase, on a $\varphi_s - \varphi_{x_{\mathrm{slo}}} = \arg(\underline{H}) = \pi/2$, donc on s'attend à avoir s et x_{sol} en quadrature avec s en avance. C'est bien le cas sur le graphique.

6 - Pour $\omega = 0{,}2\omega_0$ on est à basse fréquence, où le filtre atténue beaucoup.

Il est donc normal d'avoir une amplitude faible pour s.

On constate aussi que les deux courbes sont en opposition de phase : c'est bien ce qu'on attendait car $\underline{H} \sim -1$ à basse fréquence, donc $\arg(\underline{H}) \sim \pi$.

7 - Les ondes de type P arrivent avant les ondes de type S.

8 - La période de l'onde S est d'environ $2{,}5/8 = 0{,}31\,\mathrm{s}$, et donc sa fréquence de $f = 3{,}2\,\mathrm{Hz}$ environ.

Le sismomètre ne doit pas atténuer les fréquences qui correspondent au séisme, afin de pouvoir les enregistrer. Il doit donc posséder une pulsation propre $\omega_0 \ll 2\pi f = 20\,\mathrm{rad/s}$.

Par exemple $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$ convient.

Avec ce choix, le sismomètre ne sera pas sensible aux perturbations des marées car leurs pulsations sont de l'ordre de $2\pi \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$, très petites devant ω_0 et donc dans la zone d'atténuation.

En revanche, il sera sensible à la houle puisque sa pulsation peut être de l'ordre de $2\pi \times 1{,}\mathrm{Hz} = 6\,\mathrm{rad/s}$, supérieure à ω_0.

9 - On note $c_p = 6{,}15\,\mathrm{km/s}$ la célérité des ondes P, $c_s = 3{,}6\,\mathrm{km/s}$ celle des ondes S, $t_p = 4:37:07$ le temps d'arrivée des ondes P, et $t_s = 4:37:17{,}5$ celui d'arrivée des ondes S. On a donc $t_s - t_p = 10{,}5\,\mathrm{s}$. Toutes ces grandeurs sont connues.

On note d la distance à l'épicentre, et t_0 le temps auquel le séisme a eu lieu (à l'épicentre). Ces deux grandeurs sont inconnues.

Célérité des ondes P : $c_p = \dfrac{d}{t_p - t_0}$; célérité des ondes S : $c_s = \dfrac{d}{t_s - t_0}$.

On a donc un système de deux inconnues à deux équations, qu'il faut résoudre. On obtient après manipulations :

$$\boxed{d = \frac{(t_s - t_p)c_p c_s}{c_p - c_s} = 91\,\mathrm{km}.}$$