Fiche méthode
Mathématiques

Équations différentielles d'ordre 1 et 2

Cette fiche aborde uniquement les équations différentielles *linéaires à coefficients constants* d'ordre 1 et 2. C'est souvent ce type d'équations que vous rencontrerez en physique-chimie en CPGE.

Attention toutefois, en mathématiques vous manipulerez régulièrement des équations non linéaires (par exemple $y'^2 + y = 0$) ou à coefficients non constants (par exemple $y'(t) + t\,y(t) = 0$), et les résultats présentés ici ne s'appliquent pas.

I Résolution de $y' + y/\tau = b$

a/ Ce qu'il faut connaître

Équation	Solution
Équation homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = 0}$	$\boxed{u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$ A est une constante réelle, qui peut être obtenue avec la condition initiale $u(t=0)$.
Équation avec second membre constant : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u = \dfrac{E}{\tau}}$	$\boxed{u(t) = u_H(t) + u_P(t),}$ avec : ▶ $\boxed{u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P = E$ solution particulière de l'équation. Attention : la constante A se détermine avec la solution totale $u(t=0) = A + u_P(t=0)$, et certainement pas avec $u_H(t=0)$. Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type $\alpha\cos\omega t$, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes).

Voir ce site pour un tableau un peu plus complet, et surtout pour les liens vers des animations de systèmes vérifiant ces équations (charge et décharge de condensateur, etc.) : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre1.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths...").

b/ Exercices pour s'entraîner

$\rightsquigarrow_1$ Dans les exemples ci-dessous, écrire la forme générale des solutions.

a. $f'(x) + af(x) = 0$ avec a constant.

b. $\dot{u} + \dfrac{u(t)}{\tau} = 0$ avec τ constant.

c. $\dot{u} + \dfrac{u(t)}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ avec E et τ constants.

d. $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \alpha\, i(t) + \beta$ avec α et β constants.

e. $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \dfrac{T(s)}{c_p}$ avec c_p constant.

Réponses :

a. $f(x) = C\exp(-ax)$ **b.** $u(t) = C\exp(-t/\tau)$ **c.** $u(t) = C\exp(-t/\tau) + E$

d. $i(t) = C\exp(\alpha t) - \beta/\alpha$ **e.** $T(s) = C\exp(s/c_p)$

II Résolution de $y'' + (\omega_0/Q)\, y' + \omega_0^2 y = c$

a/ Ce qu'il faut connaître

Remarque : les équations du second ordre font intervenir deux constantes d'intégration. Il faut donc deux conditions initiales pour les déterminer, en générale une sur $u(t=0)$ et une sur $u'(t=0)$.

Sur le même site que précédemment, mais pour les systèmes du 2e ordre : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/equadiff/equadif/ordre2.html (le lien est aussi sur le site de la classe, rubrique "TP, DS, maths...").

Équation	Solution
Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0}$	$\boxed{u(t) = A\, \cos(\omega_0 t) + B\, \sin(\omega_0 t),}$ Détermination de A et B : Supposons que l'on connaisse $u(t=0) = u_0$ et $u'(t=0) = u_1$. – On a alors $u_0 = u(t=0) = A$, – Pour $u'(t=0)$ il faut d'abord calculer $u'(t) = -A\omega_0\, \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\, \cos(\omega_0 t)$, puis prendre la valeur à $t=0$: $u'(t=0) = B\omega_0$. On a donc $u_1 = B\omega_0$ et donc $B = u_1/\omega_0$. Rq : on peut aussi avoir la solution sous la forme $\boxed{u(t) = A'\, \cos(\omega_0 t + \varphi),}$ avec A' et φ des constantes à déterminer (même méthode).
Équation de type oscillateur harmonique (donc sans frottement), avec second membre : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = \alpha}$	$\boxed{u(t) = u_H(t) + u_P(t),}$ avec : ▶ $\boxed{u_H(t) = A\, \cos(\omega_0 t) + B\, \sin(\omega_0 t)}$ solution de l'équation homogène, ▶ $u_P = \alpha/\omega_0^2$ solution particulière de l'équation.

Remarque : Ici comme dans les autres cas, l'expression de la solution particulière n'est pas à connaître. Il faut la trouver en supposant qu'elle est constante : dans ce cas, tous les termes en dérivée de u sont nuls, et on isole simplement u.

Ici ceci donne :

$$0 + \omega_0^2 u_P = \alpha \quad \text{d'où} \quad u_P = \alpha/\omega_0^2.$$

Autre remarque : on peut voir que les formes $u_H(t) = A\, \cos(\omega_0 t) + B\, \sin(\omega_0 t)$ et $u_H(t) = A'\, \cos(\omega_0 t + \varphi)$ sont équivalentes en développant cette dernière :

$$u_H(t) = A'\, \cos(\omega_0 t + \varphi) = A'\,(\cos\omega_0 t\, \cos\varphi - \sin\omega_0 t\, \sin\varphi) = \underbrace{A'\cos\varphi}_{=A}\, \cos\omega_0 t\, \underbrace{-A'\sin\varphi}_{=B}\, \sin\omega_0 t.$$

Équation	Solution
Équation avec dissipation (terme $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$), homogène : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0}$ ou avec les notations de la SI : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0}$ (donc $\xi = 1/(2Q)$)	Équation caractéristique : $\boxed{r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0,}$ de discriminant $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$. Solution : ▶ Si $Q < 1/2$ (soit $\xi > 1$) : régime apériodique. Les racines r_1 et r_2 du polynôme sont réelles et s'écrivent $-\dfrac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$. On a $\boxed{u(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t).}$ ▶ Si $Q = 1/2$ (soit $\xi = 1$) : régime critique. $\Delta = 0$ et une seule racine (double) $r_1 = -\omega_0$. On a $\boxed{u(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t).}$ ▶ Si $Q > 1/2$ (soit $\xi < 1$) : régime pseudo-périodique. Les racines r_1 et r_2 du polynôme sont complexes conjugués, $r_1 = -\mu + \mathrm{j}\Omega$ et $r_2 = -\mu - \mathrm{j}\Omega$ avec $\mu = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$. On a $\boxed{u(t) = \exp(-\mu t)\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)].}$ Rq 1 : Q donne une idée du nombre d'oscillations dans le régime pseudo-périodique (donc de la durée du transitoire, qui est $Q \times T_0$). Rq 2 : Pour le régime pseudo-périodique, on peut aussi écrire la solution sous la forme $u(t) = \exp(-\mu t)\, A' \cos(\omega t + \varphi)$.
Équation avec frottement et avec second membre constant : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \alpha}$ ou $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \alpha}$	$\boxed{u(t) = u_H(t) + u_P(t),}$ avec : ▶ $u_H(t)$ solution de l'équation homogène (voir au dessus), ▶ $u_P = \alpha/\omega_0^2$ solution particulière de l'équation. Rq : si le second membre est sinusoïdal, du type $\alpha\cos\omega t$, alors la solution particulière est celle du régime sinusoïdal forcé (étude en complexes, chapitre 4).

Remarque en lien avec le cours de mathématiques : dans le cas apériodique comme dans le cas pseudo-périodique, les solutions de l'équation homogène sont des combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$. Mais dans le cas pseudo-périodique on préfère manipuler l'expression pour faire apparaitre cosinus et sinus, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
u_H(t) &= A'\mathrm{e}^{r_1 t} + B'\mathrm{e}^{r_1 t} \\
&= A'\mathrm{e}^{-\mu t + \mathrm{j}\Omega t} + B'\mathrm{e}^{-\mu t - \mathrm{j}\Omega t} \\
&= \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A'\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\Omega t} + B'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A'\cos\Omega t + A'\mathrm{j}\sin\Omega t + B'\cos\Omega t - B'\mathrm{j}\sin\Omega t\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\mu t}\left(\underbrace{[A'+B']}_{=A}\cos\Omega t + \underbrace{\mathrm{j}[A'-B']}_{=B}\sin\Omega t\right)
\end{aligned}$$

L'avantage de cette forme est que comme le signal $u_H(t)$ est réél, alors A et B sont réels. Il n'y a plus de complexes dans l'expression finale.

Remarques techniques pas très importantes :

- Pourquoi environ Q oscillations visibles lors du régime pseudo-périodique ?

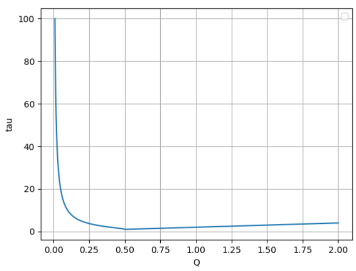
  Prenons $3\tau = \dfrac{3}{\mu} = 3 \times \dfrac{2Q}{\omega_0}$ comme durée du transitoire (décroissance à 95% de l'enveloppe exponentielle de u_H).

  Une période d'oscillation est $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} \underset{\uparrow \text{ si Q assez grand}}{=} \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

  Pendant 3τ il y a un nombre d'oscillations qui est $\dfrac{3\tau}{T} = \dfrac{3Q}{\pi} \simeq Q$.

- Pourquoi le régime transitoire est-il le plus court pour $Q = 1/2$? (au sens où c'est celui où u_H tend le plus vite vers 0)

  Pour $Q \geq 1/2$, $\tau = 1/\mu = 2Q/\omega_0$; pour $Q \leq 1/2$, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0(1-\sqrt{1-4Q^2})}$ (la solution avec le + donne un τ plus court donc une exponentielle qui disparait plus tôt).
  On peut faire l'étude, ou tracer (cf ci-contre où $\omega_0 = 1$), et constater que le minimum est atteint en $Q = 1/2$.



b/ Exercices pour s'entraîner

$\rightsquigarrow_2$ L'équation différentielle régissant les oscillations d'une masse accrochée à un ressort est $m\ddot{x} = -kx$, $k > 0$. Écrire les solutions de cette équation, sachant qu'à $t = 0$ on a $x = x_0$ et une vitesse nulle.

$\rightsquigarrow_3$ On considère maintenant que la masse oscille dans un milieu où les frottements ne peuvent plus être négligés. On a donc $m\ddot{x} = -kx - f\dot{x}$ avec $k, f > 0$. Donner l'expression de f à partir de laquelle il n'y aura plus du tout d'oscillations.